

Динамические системы
и
методы математического моделирования
Элементы теории бифуркаций

Понятие бифуркации

- **Происхождение термина бифуркация** (от лат. bifurcus - раздвоенный) связано с тем фактом, что динамическая система, поведение которой в равновесной области описывается системой линейных дифференциальных уравнений, имеющих единственное решение, при изменении параметров до некоторого критического значения, достигает так называемой *точки бифуркации* – точки ветвления возможных путей эволюции системы.
- Этот момент (точка ветвления) соответствует переходу системы в неравновесное состояние, а *на уровне математического описания ему соответствует переход к нелинейным дифференциальным уравнениям и ветвление их решений.*

Понятие бифуркации

- **Бифуркация** – приобретение нового качества эволюции динамической системы при малом изменении ее параметров. *Бифуркация соответствует перестройке характера движения или структуры системы.*
- **Бифуркация** – это смена топологической структуры разбиения фазового пространства динамической системы на траектории при малом изменении ее параметров.
- *Топологическая эквивалентность динамических систем:* две системы топологически эквивалентны, если они имеют одинаковую структуру разбиения фазового пространства на траектории, если движения одной из них могут быть сведены к движениям другой непрерывной заменой координат и времени.

Дифференциальные уравнения с параметрами

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mu)$$

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ - фазовые переменные

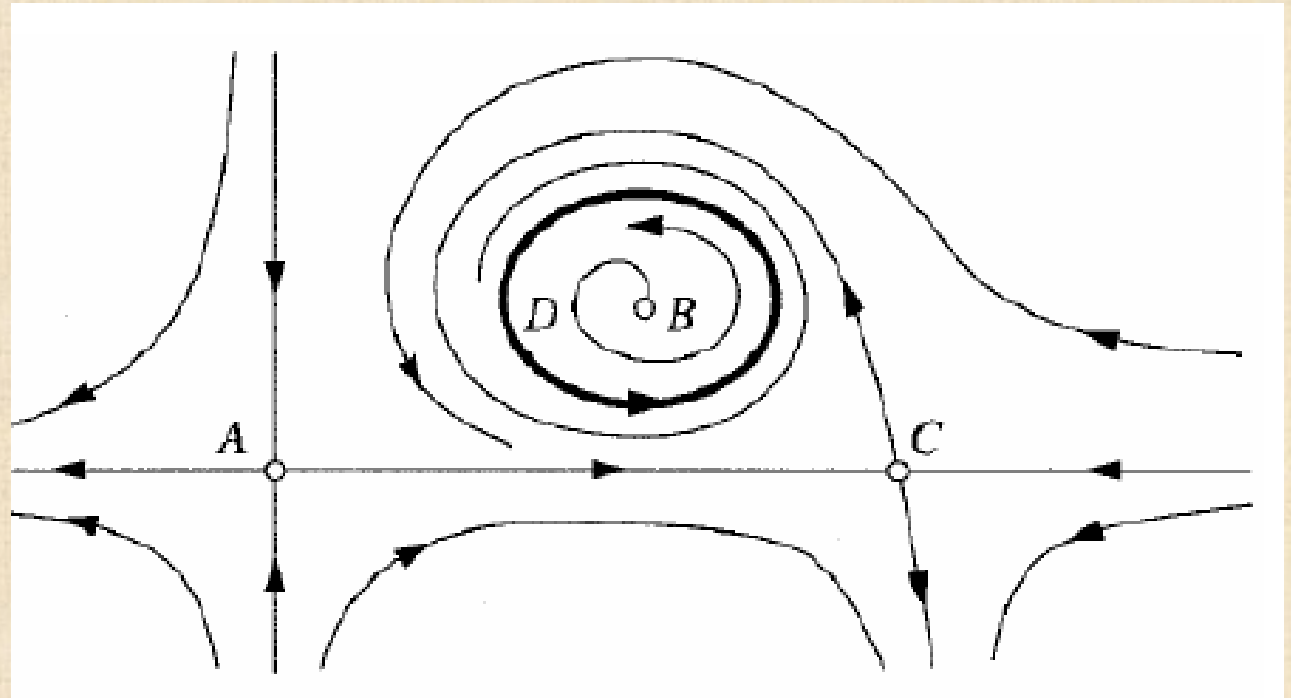
$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)^T$ - параметры

Бифуркации - ситуации, в которых небольшое изменение параметров приводит к качественному изменению поведения решений.

Фазовый портрет

Если система нелинейная, то, как правило, найти решения аналитически невозможно. Поэтому полезно изучать фазовые портреты:

- Неподвижные точки
- Периодические решения
- Вид портрета вблизи неподвижных точек и периодических решений
- Устойчивость неподвижных точек и периодических решений



Виды неподвижных точек

а) седло

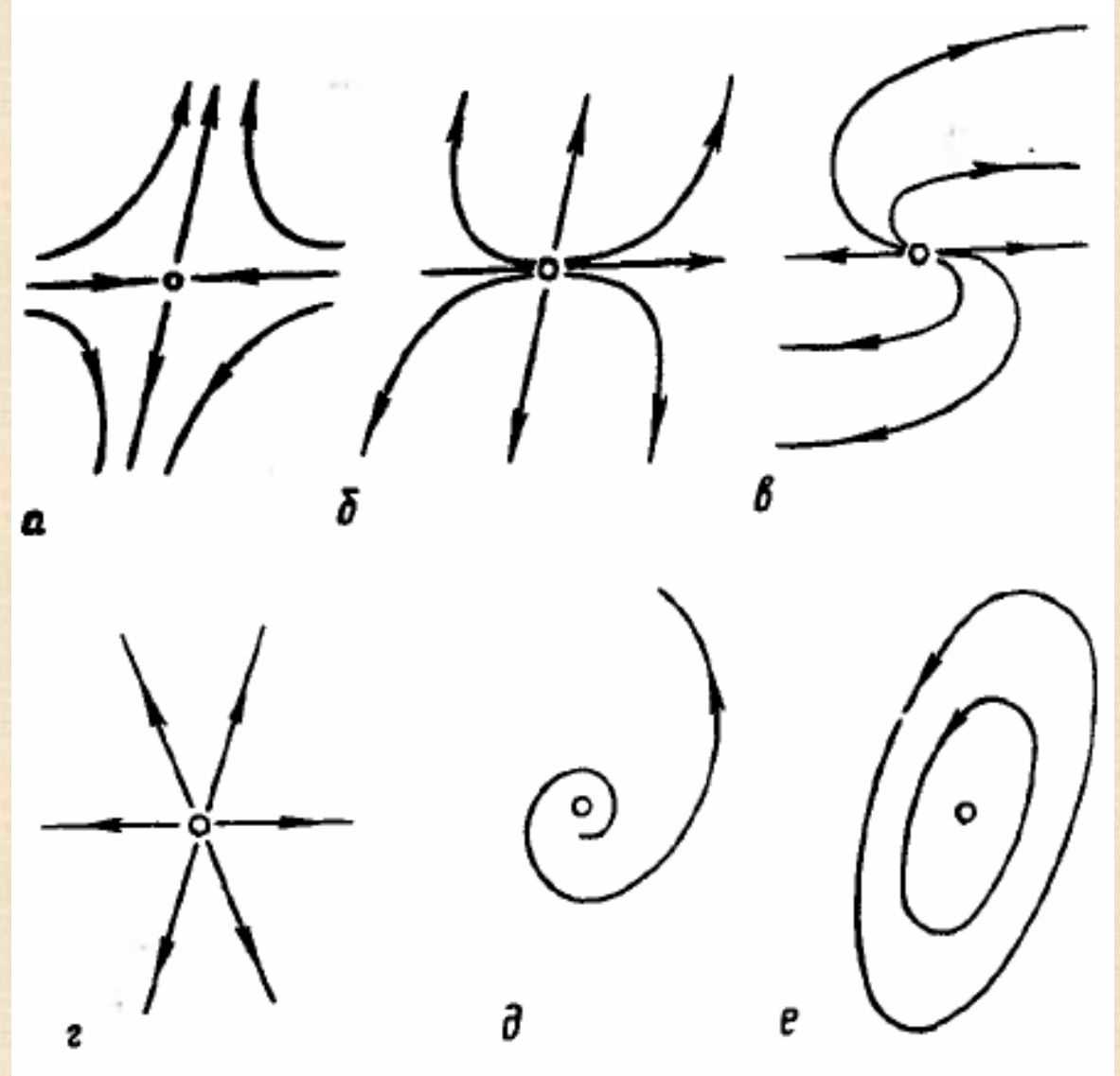
б) узел

в) вырожденный узел

г) дикритический узел

д) фокус

е) центр



Характеристики бифуркации

- **Коразмерность** - количество параметров, необходимых для реализации бифуркации. В точке бифуркации коразмерности k выполняется k бифуркационных условий (условий типа равенств) и ряд условий невырожденности – условий типа неравенств.
- **Бифуркационное многообразие** – гиперповерхность размерности k в пространстве параметров, заданная бифуркационными условиями
- **Локальные бифуркации** – бифуркации положений равновесия

Элементарные бифуркации в системе, заданной на прямой

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \mu)$$

$x_0(\mu)$ - стационарное решение: $F(x_0(\mu), \mu) = 0$

«Грубый» случай:

$$\rho(\mu) = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x_0(\mu)} \neq 0$$

$\rho < 0$ - устойчивость

$\rho > 0$ - неустойчивость

Элементарные бифуркации в системе, заданной на прямой

Бифуркация коразмерности 1 – слияние (рождение) пары равновесий

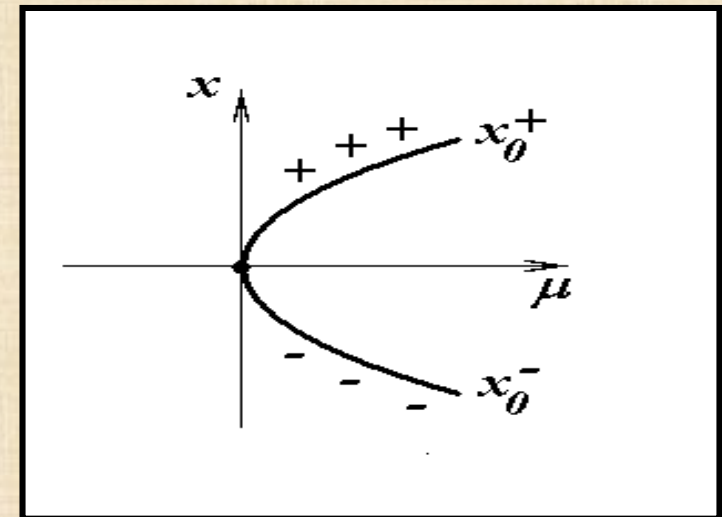
$$\frac{dx}{dt} = -x^2 + \mu$$

Бифуркационные условия

$$\left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x_0(\mu)} = 0, \quad \left. \frac{d^2 F}{dx^2} \right|_{x=x_0(\mu)} \neq 0$$

Положения равновесия

$$x_0^\pm(\mu) = \pm\sqrt{\mu}$$



Элементарные бифуркации в системе, заданной на прямой

Бифуркация коразмерности 2 (сборка)

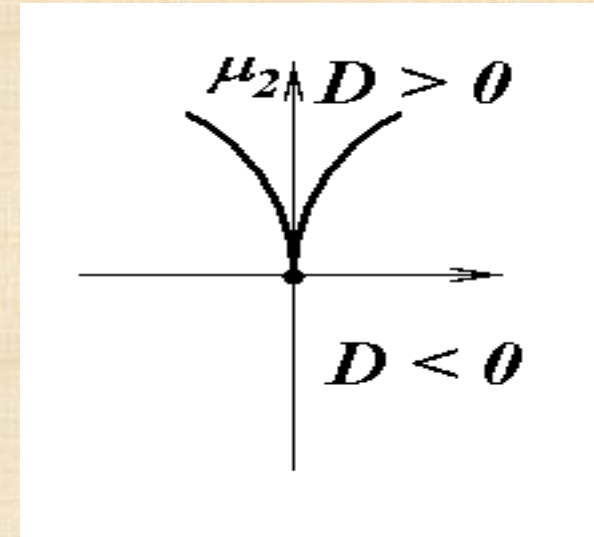
$$\frac{dx}{dt} = \mu_1 + \mu_2 x - x^3$$

Неподвижные точки - корни уравнения

$$-x^3 + \mu_2 x + \mu_1 = 0$$

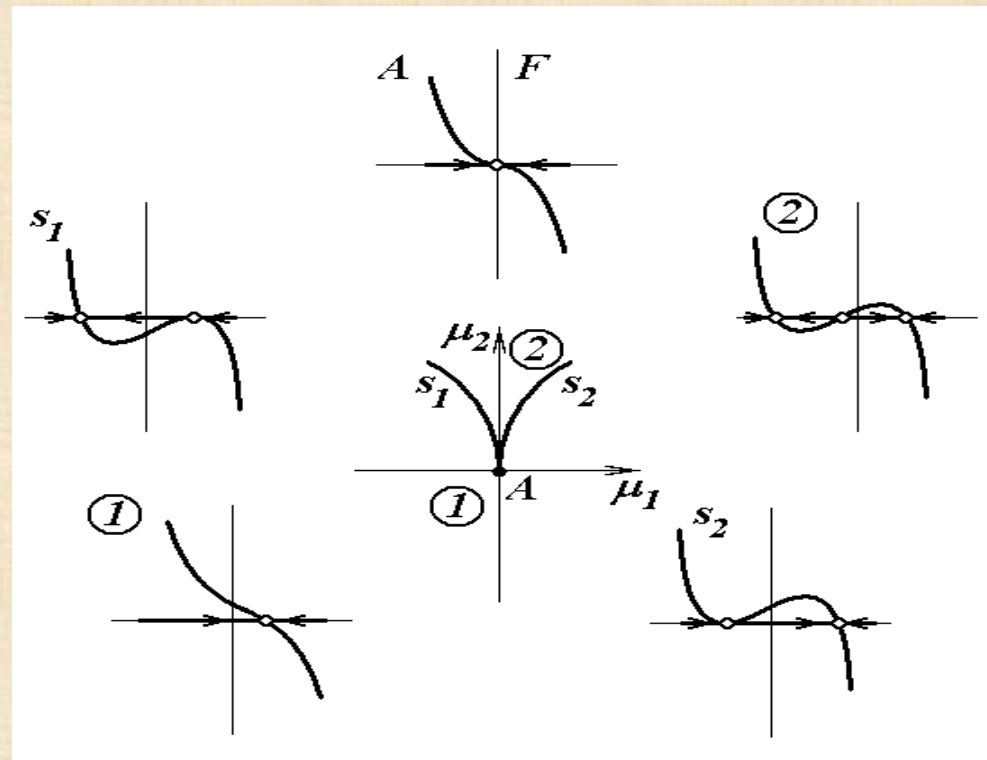
Дискриминант:

$$D = 4\mu_2^3 - 27\mu_1^2$$



Элементарные бифуркации в системе, заданной на прямой

Бифуркация коразмерности 2 – бифуркационная диаграмма



Мягкие и жесткие бифуркации

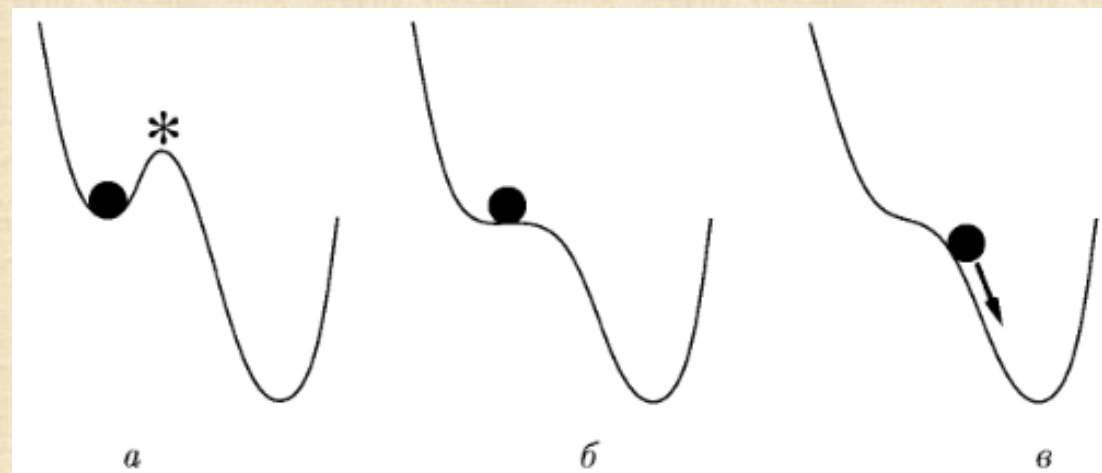
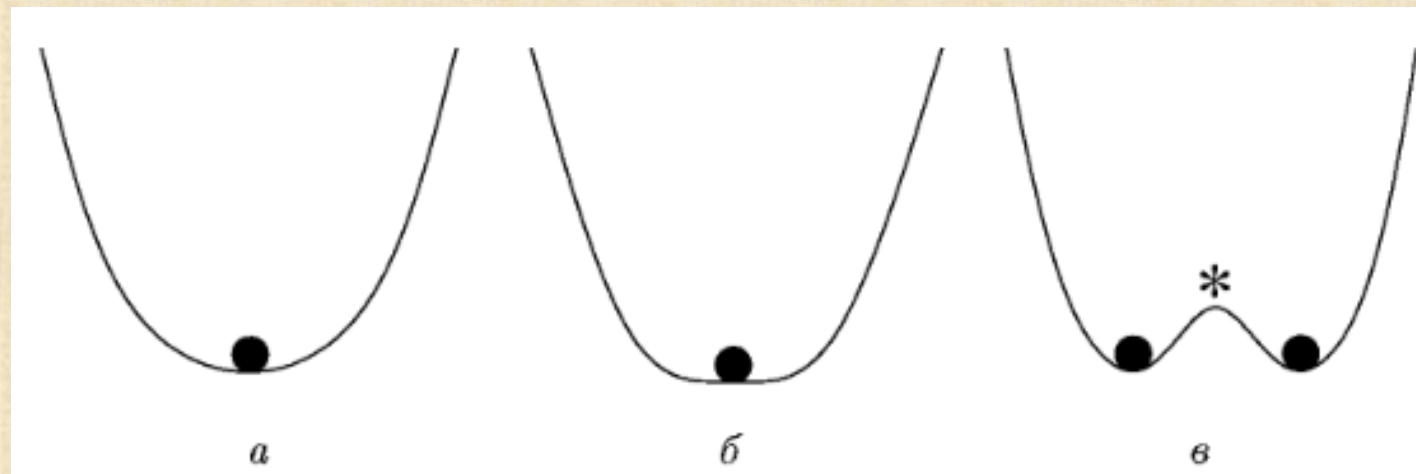
Мягкая потеря устойчивости
– два новых стационарных
состояния вблизи старого

$$\dot{x} = rx - x^3$$

$$-\frac{dV}{dx} = rx - x^3 \quad V = -\frac{1}{2}rx^2 + \frac{1}{3}x^4$$

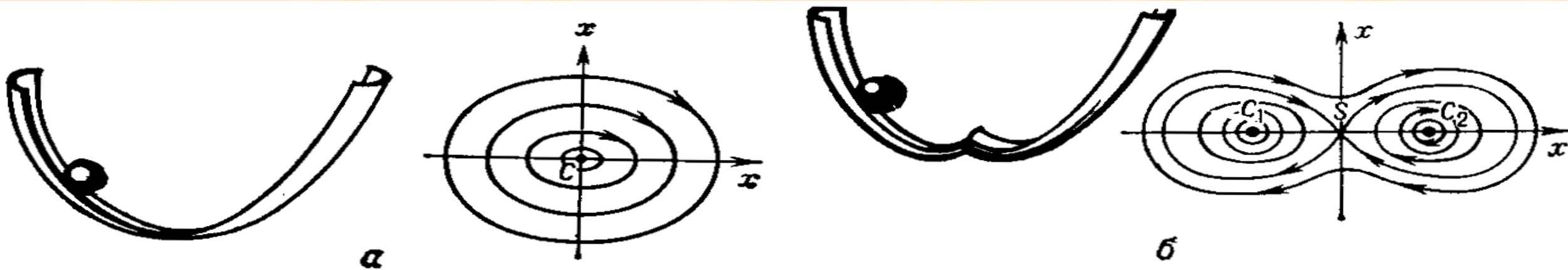
Жесткая потеря устойчивости
стационарным состоянием,
катастрофа

$$\dot{x} = rx + x^3 - x^5$$



Рождение из одного равновесного состояния трёх состояний равновесия

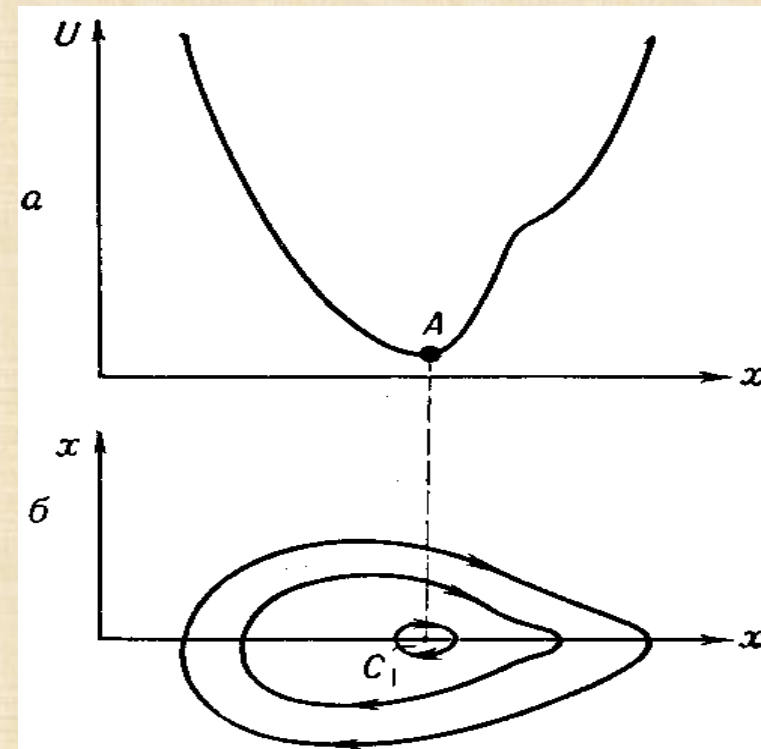
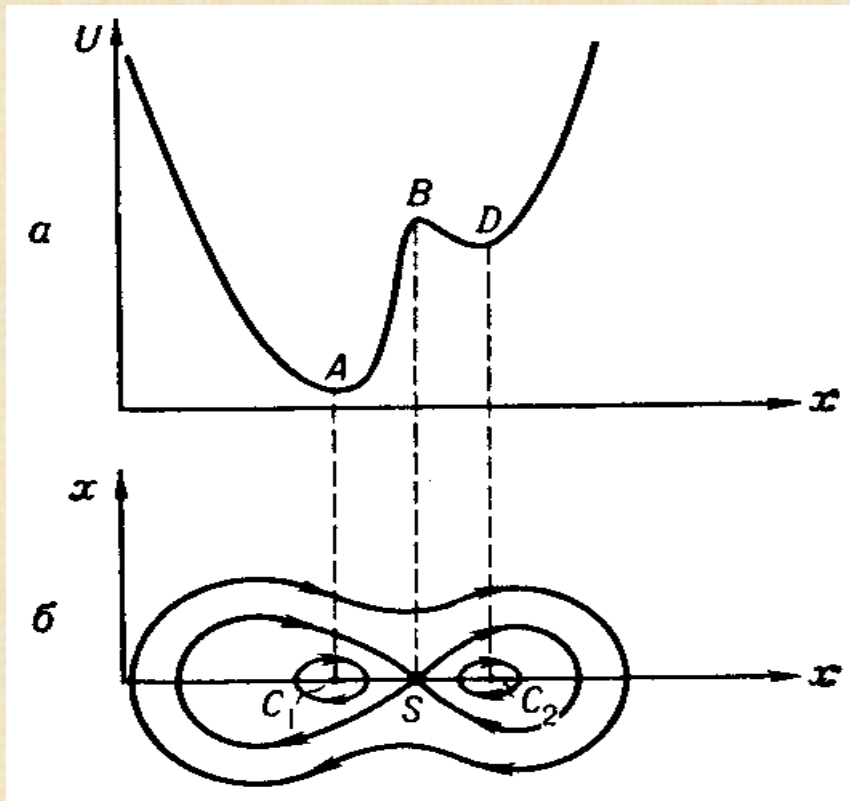
Изменению движения шарика в жёлобе при появлении на дне жёлоба бугорка соответствует бифуркация, при которой из вырожденного состояния равновесия типа центр (рис. а) возникают три состояния равновесия - седло S и центры C_1 и C_2 (рис. б). При этом возможно существование устойчивых несимметричных движений в полностью симметричной системе.



Слияние и последующее исчезновение двух состояний равновесия

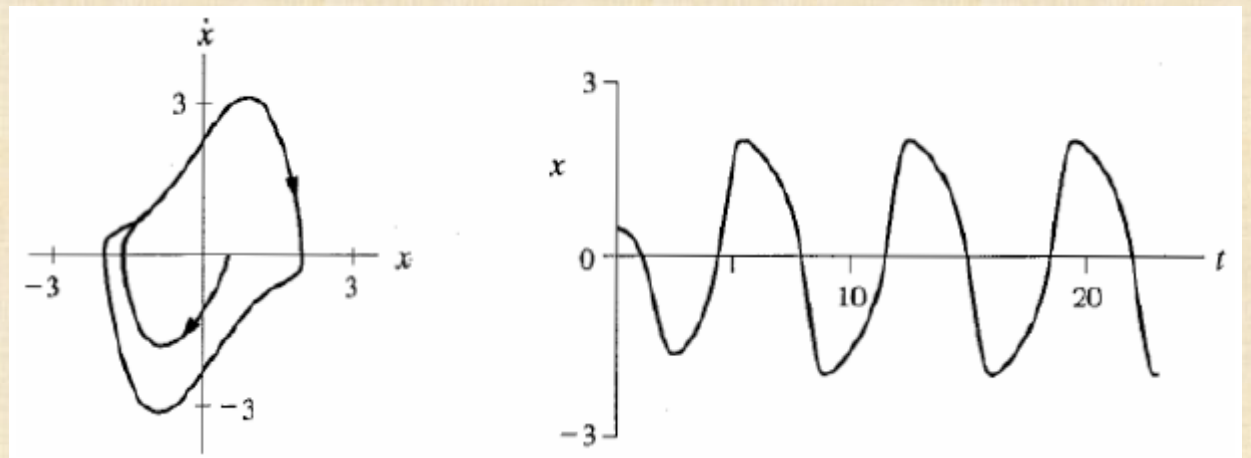
Движение шарика в потенциальной яме с «полочкой».

При сглаживании полочки (BD, рис. слева) состояния равновесия, седло S и центр C_2 сливаются и исчезают (рис. справа).



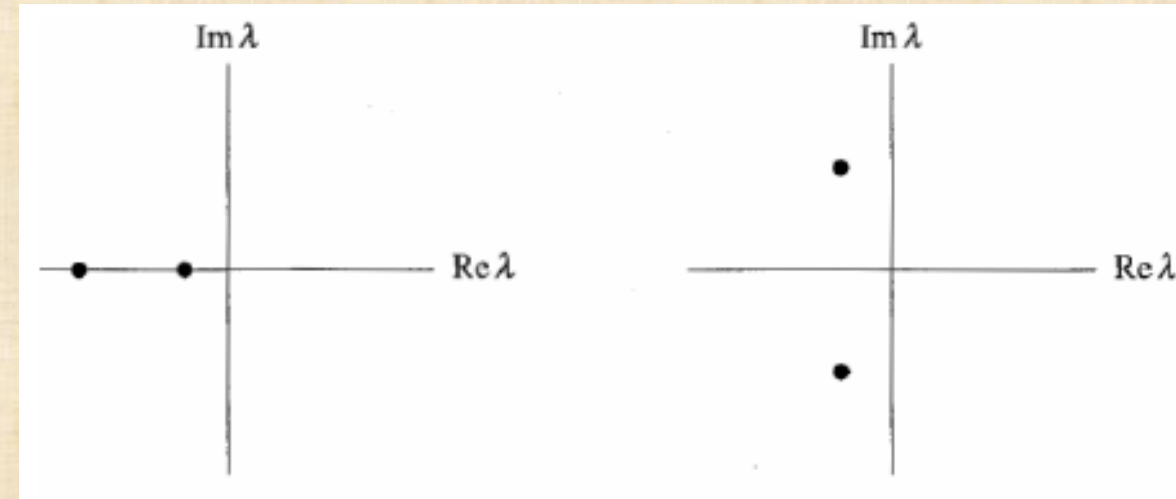
Рождение предельного цикла из состояния равновесия.

Пример такой бифуркации - переход простейшего лампового генератора при соответствующем изменении управляющего напряжения от режима статических колебаний к автоколебательному режиму. В этом случае на фазовой плоскости из устойчивого фокуса в начале координат при коэффициенте затухания $\mu \geq 0$ рождается предельный цикл, амплитуда которого при малых μ имеет порядок $\mu^{1/2}$, а фокус становится неустойчивым.



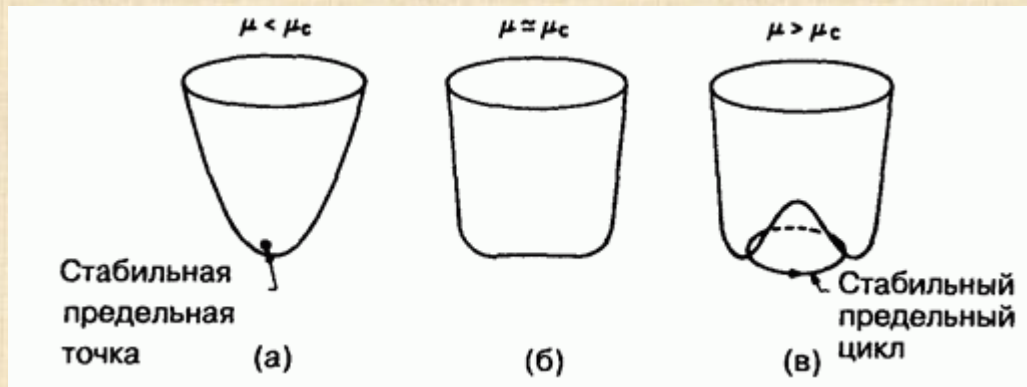
Бифуркация Пуанкаре-Андронова-Хопфа

Чтобы точка потеряла устойчивость, необходимо, чтобы одно или оба собственных значения перешли в правую полуплоскость при изменении параметра

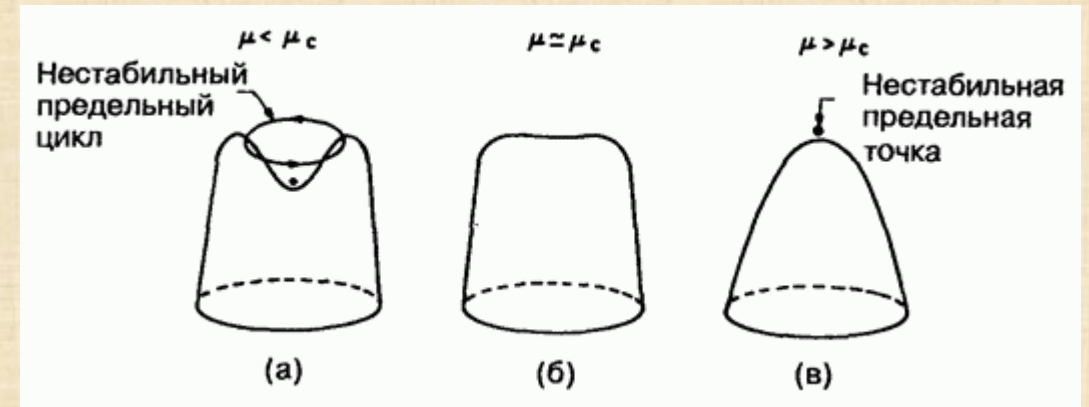


Если при критическом значении параметра, при котором два собственных значения перемещаются в правую полуплоскость, выполняются определённые условия на первую, вторую и третью производные правой части, можно показать, что предельная точка в результате бифуркации переходит в устойчивую периодическую траекторию (предельный цикл)

Бифуркация Пуанкаре-Андроновна-Хопфа



Нормальная или сверхкритическая бифуркация Хопфа



Обратная или субкритическая бифуркация Хопфа

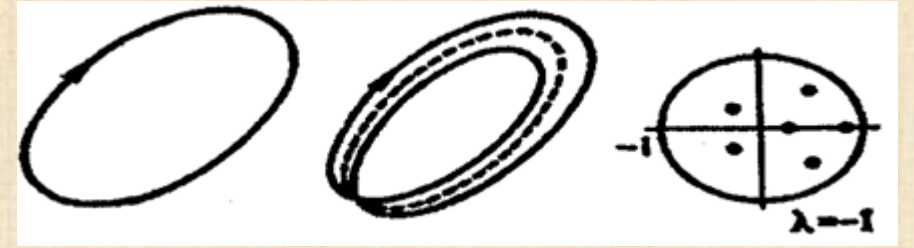
Бифуркации смены устойчивости периодических движений

- Важной характеристикой бифуркаций смены устойчивости периодических движений являются значения **мультипликаторов Флоке**, которые представляют собой коэффициенты усиления (затухания) малых возмущений на фоне рассматриваемого периодического движения за период T .
- **Мультипликаторы** – собственные значения матрицы $\exp(RT)$, характеризующей решение $Z(t) = C(T) \cdot \exp(RT)$ линеаризованной системы в окрестности исследуемого периодического движения

$$x = f(t, \mu), \quad f(t+T, \mu) \equiv f(t, \mu).$$

Здесь R - постоянная, $C(t)$ – периодическая матрица: $C(t+T) \equiv C(t)$.

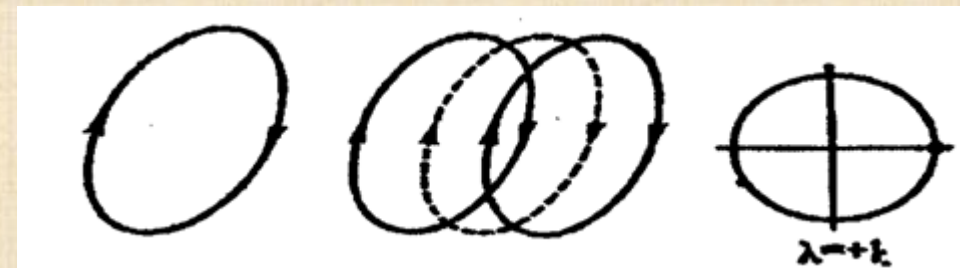
В случае равенства одного из мультипликаторов единице осуществляется так называемая *бифуркация удвоения периода*



Появлению двухчастотных колебаний в физической системе отвечает *бифуркация рождения двумерного тора из периодической траектории*



В системах, зависящих от двух параметров, или в системах с определенным типом симметрии встречается бифуркация, при которой рождается *сразу 2 устойчивых предельных цикла*



Бифуркации и хаос

- В момент времени, когда система находится вблизи точки бифуркации, существенную роль начинают играть малые возмущения значений ее параметров. Эти возмущения могут носить как чисто случайный характер, так и быть целенаправленными. Именно от них зависит, по какой эволюционной ветви пойдет система, пройдя через точку бифуркации.
- *Если до прохождения точки бифуркации, поведение системы детерминировано, то в самой точке бифуркации решающую роль играет случай.*

Бифуркации неподвижных точек одномерных отображений

Точка x^* называется неподвижной точкой отображения $f(x)$ если $x^* = f(x)$, то есть неподвижные точки лежат на пересечении графика $f(x)$ с биссектрисой.

Неподвижная точка локально устойчива, если все точки x_0 в окрестности точки x^* притягиваются к ней, то есть если последовательность итераций x_0 сходится к x^* .

Поскольку расстояние δ_n до точки x^* изменяется следующим образом:

$$\delta_{n+1} = |x_{n+1} - x^*| = |f(x_n) - x^*| = |f(x^* + \delta_n) - x^*| \approx \left| \frac{d}{dx^*} f(x^*) \right| \cdot \delta_n,$$

то аналитическим критерием локальной устойчивости является: $\left| \frac{d}{dx^*} f(x^*) \right| < 1$

Бифуркации неподвижных точек одномерных отображений

Для одномерных отображений существует 2 способа изменения устойчивости неподвижной точки, когда мультипликатор точки $\rho = +1$ и $\rho = -1$. Однако число связанных с этим бифуркаций заметно больше. Это объясняется тем, что в них часто участвует более одной неподвижной точки. Такой ситуации соответствуют 4 варианта бифуркаций.

- *Касательная бифуркация (складка, седло-узловая)*
- *Транскритическая бифуркация*
- *Вилообразная бифуркация (бифуркация потери симметрии)*
- *Бифуркация удвоения*

Касательная бифуркация

Рассмотрим отображение $x_{n+1} = \mu + x_n + x_n^2$.

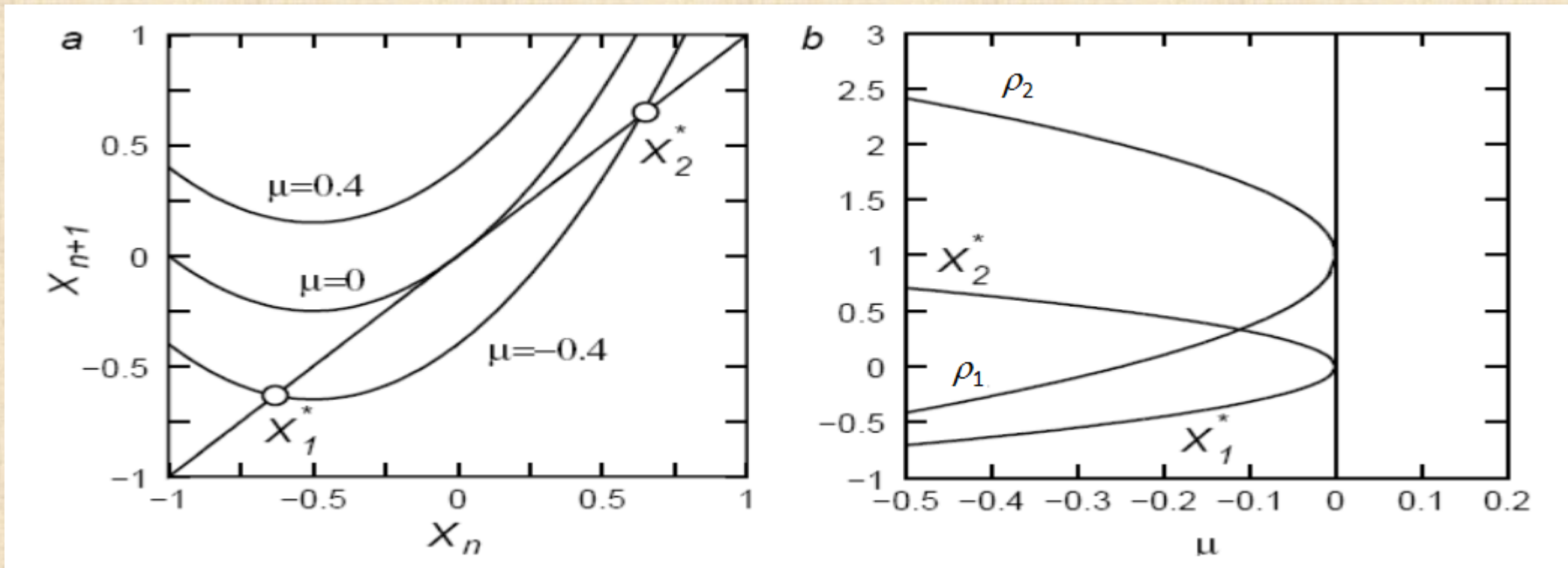
При отрицательном μ оно имеет две неподвижные точки:

$$x_1^* = -\sqrt{-\mu}, \quad x_2^* = +\sqrt{-\mu}.$$

1-я точка - устойчива, а 2-я – неустойчива.

Будем увеличивать значение параметра μ , следя за положением неподвижных точек, а также за их мультипликаторами, которые определяются как

$$\rho_{1,2} = f'(x_{1,2}^*).$$



При увеличении μ неподвижные точки сближаются, при $\mu = 0$ происходит слияние.

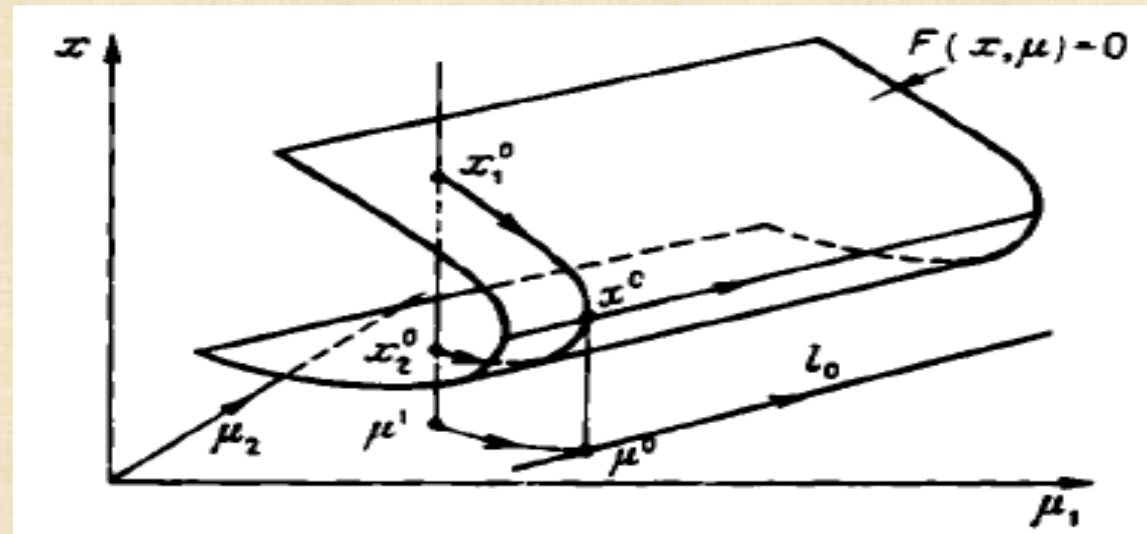
Значения мультипликаторов стремятся к 1, одно – справа, а другое – слева.

В момент достижения равенства $\rho_{1,2} = +1.0$ обе неподвижные точки сливаются и исчезают. При $\mu > 0$ неподвижных точек у отображения нет.

Касательную бифуркацию иногда называют — «*складкой*», потому что график для неподвижных точек напоминает складку с вершиной в точке $\mu = 0$.

Такой бифуркации соответствует поверхность, имеющая особенность типа *складки* вдоль линии l_0 на плоскости параметров.

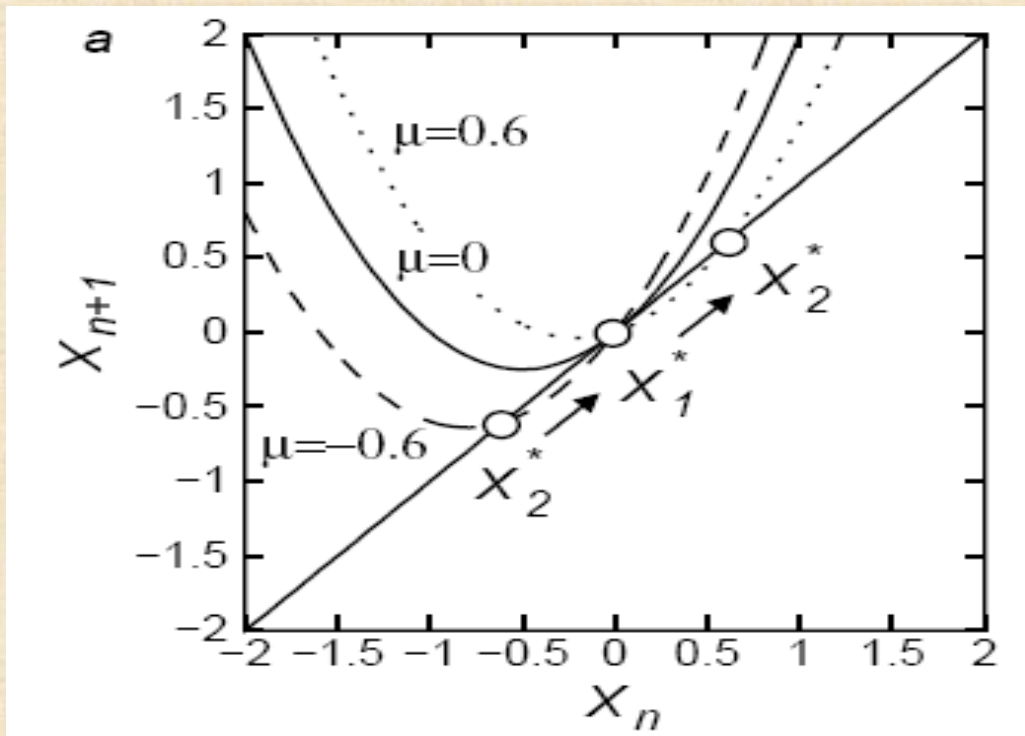
Таким образом, в касательной бифуркации участвуют 2 неподвижные точки, устойчивая и неустойчивая. Одновременное достижение их мультипликаторами граничной величины $\rho = +1$ соответствует их слиянию и исчезновению.



Транскритическая бифуркация

Рассмотрим отображение $x_{n+1} = (1 - \mu)x_n + x_n^2$.

При всех μ , кроме $\mu = 0$, оно имеет две неподвижные точки $x_1^* = 0$, $x_2^* = \mu$.



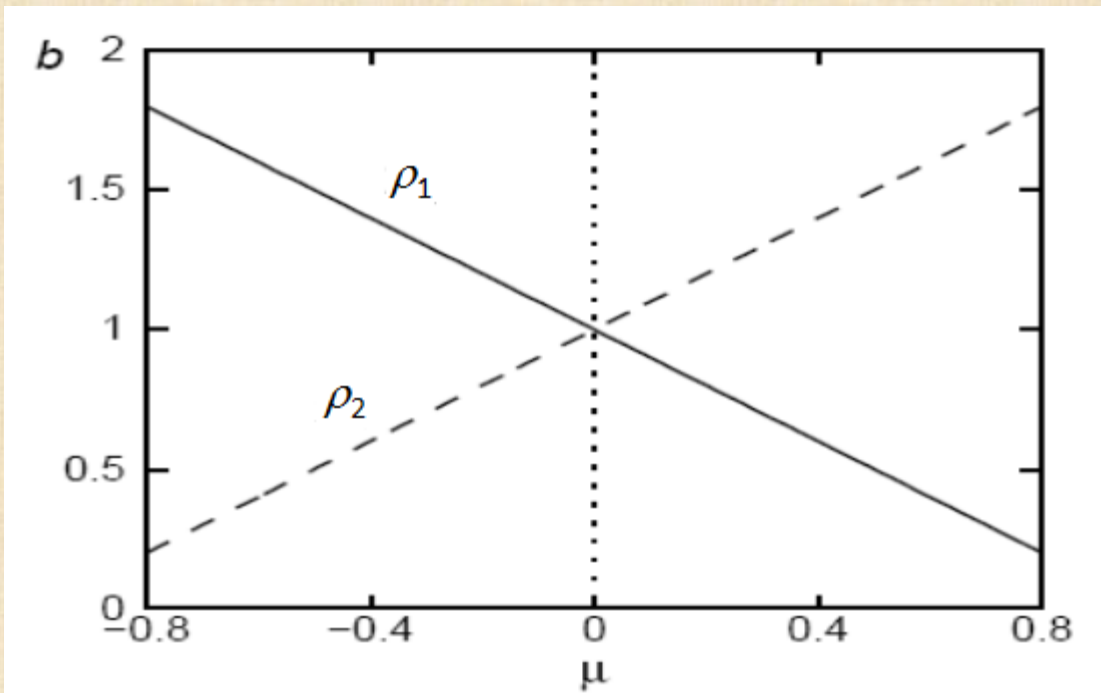
По мере увеличения параметра точка x_2^* сближается с x_1^* , «проходит сквозь нее» и затем удаляется. При $\mu = 0$ неподвижные точки «обмениваются» устойчивостью: при $\mu \leq 0$ точка x_2^* – устойчива, а x_1^* – нет, при $\mu \geq 0$ – наоборот!

Изобразим графически изменение собственных значений в неподвижных точках в зависимости от μ :

$$f'(x_n) = 1 - \mu + 2x,$$

$$x_1^* = 0: \rho_1 = 1 - \mu,$$

$$x_2^* = \mu: \rho_2 = 1 + \mu.$$



Прямые пересекаются в точке транскритической бифуркации $\mu = 0$ и $\rho_{1,2} = +1$.

Вилообразная бифуркация

Вилообразная (pitchfork) бифуркация или бифуркация потери симметрии наблюдается в системе с симметрией.

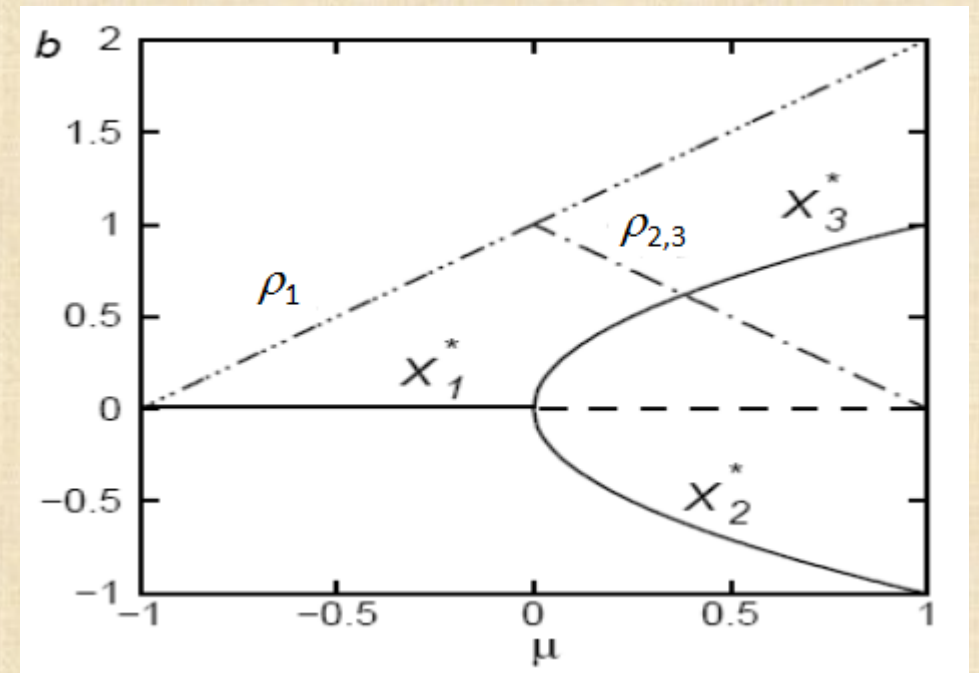
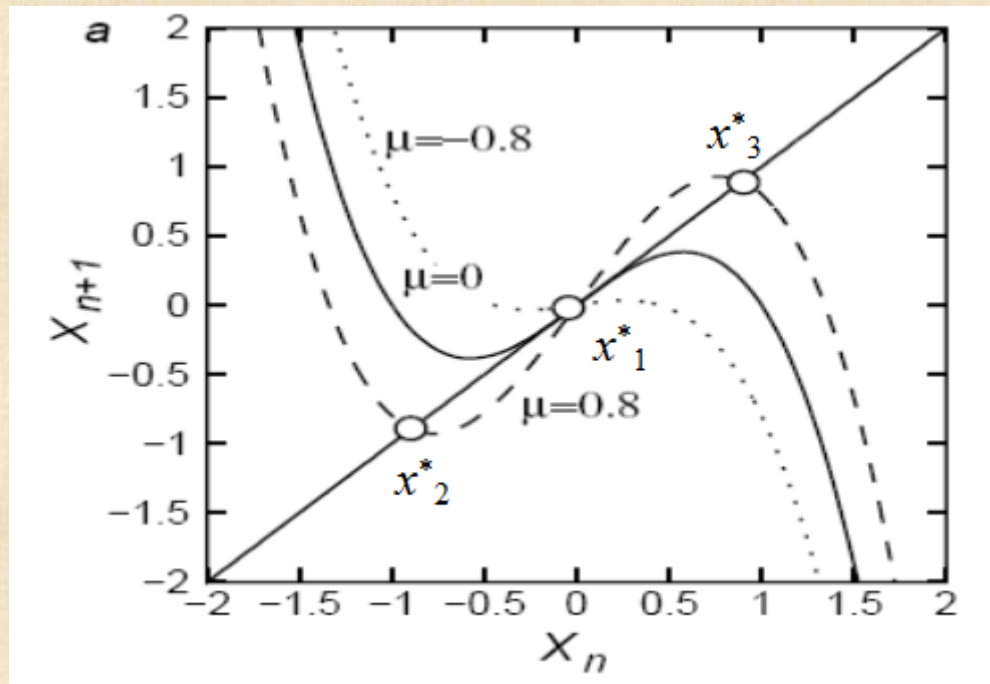
Рассмотрим отображение $x_{n+1} = (\mu + 1)x_n - x_n^3$.

График функции симметричен относительно замены $x_n \rightarrow -x_n$.

При $\mu < 0$ имеется единственная неподвижная точка $x^*_1 = 0$. При $\mu > 0$ появляются еще две точки: $x^*_{2,3} = \pm\sqrt{\mu}$.

Собственные значения неподвижных точек: $\rho_1 = 1 + \mu$, $\rho_{2,3} = 1 - 2\mu$.

Если $-2 < \mu < 0$, то x^*_1 – устойчива. Если $\mu = 0$, то от нее «отщепляются» устойчивые x^*_2 и x^*_3 , сама же x^*_1 теряет устойчивость. $\rho_{1,2,3} = +1$ при $\mu = 0$.



Бифуркация удвоения

Бифуркация удвоения соответствует второй границе зоны устойчивости неподвижной точки, когда $\rho = -1$. Сверхкритический вариант этой бифуркации получил широкую известность благодаря той роли, которую она играет при возникновении хаотического аттрактора по сценарию Фейгенбаума.

Рассмотрим отображение $x_{n+1} = \mu - x_n - x_n^2$.

Его неподвижные точки: $x_{1,2}^* = -2 \pm \sqrt{4 + 4\mu} / 2 = -1 \pm \sqrt{\mu + 1}$.

Будем следить за точкой x_1^* и эволюцией ее собственного значения, которое можно вычислить следующим образом:

$$\rho_1 = -(2x_1^* + 1) = -1 + 2 - 2\sqrt{\mu + 1} = 1 - 2\sqrt{\mu + 1}.$$

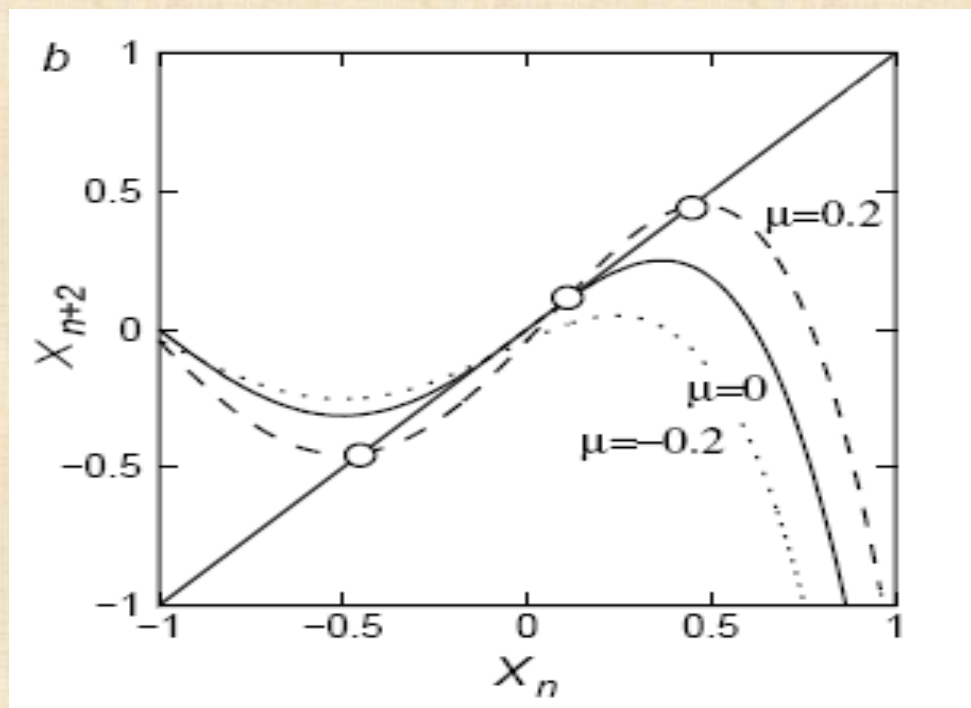
При $-1 < \mu < 0$ $\rho_1 < 1$ и неподвижная точка x_1^* устойчива. В точке $\mu = -3/4$ $\rho_1 = 0$. Это означает, что при переходе μ через это значение характер сходимости меняется от монотонного при $-1 < \mu < -3/4$ к знакопеременному при $\mu > -3/4$.

При $\mu = 0$ $\rho_1 = -1$. Этот случай соответствует потере устойчивости неподвижной точкой. Траектория начинает расходиться, причем отклонение меняет свой знак на каждой итерации. Если бы отображение было линейным, то это было бы единственным событием. Однако наличие нелинейности обогащает картину бифуркации.

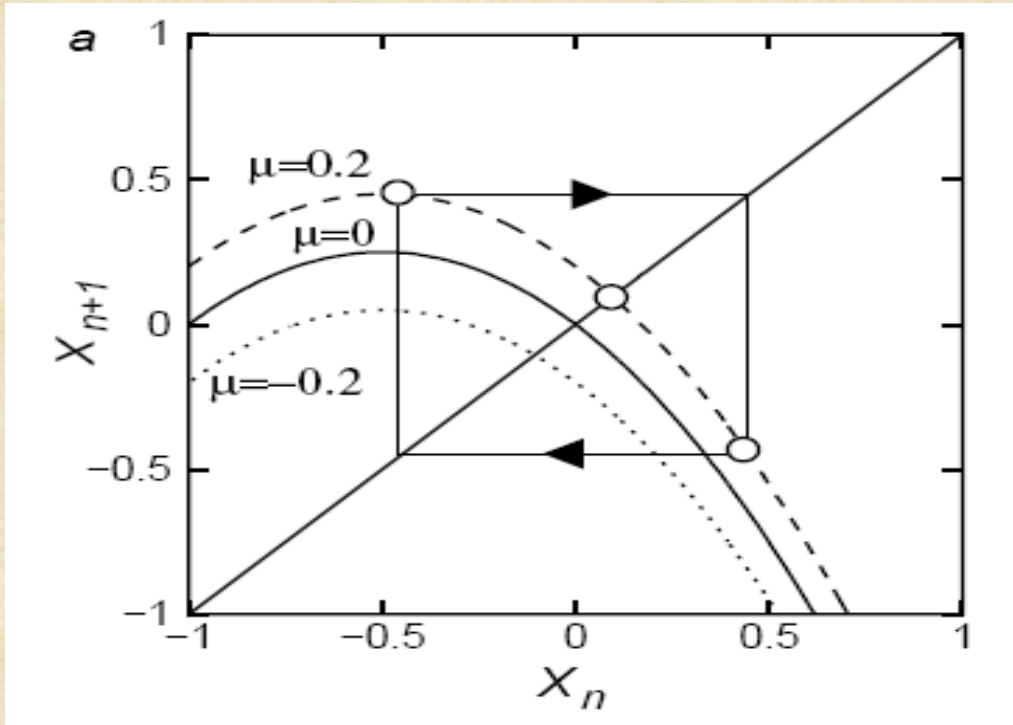
Рассмотрим дважды примененное отображение :

$$x_{n+2} = \mu - (\mu - x_n - x_n^2) - (\mu - x_n - x_n^2)^2.$$

Определенные выше неподвижные точки отображения будут таковыми и для дважды примененного отображения, при этом траектория в их окрестности уже не осциллирует. Однако расчет собственного значения ρ для в точке $\mu = 0$ дает значение $+1$!



В дважды примененном отображении критической ситуации $\rho_1 = -1$ соответствует совсем другое событие, $\rho_{1,2} = +1$. При $\mu = 0$ имеет место вилообразная бифуркация. x_1^* теряет устойчивость, однако в её окрестности рождаются две новые устойчивые неподвижные точки.

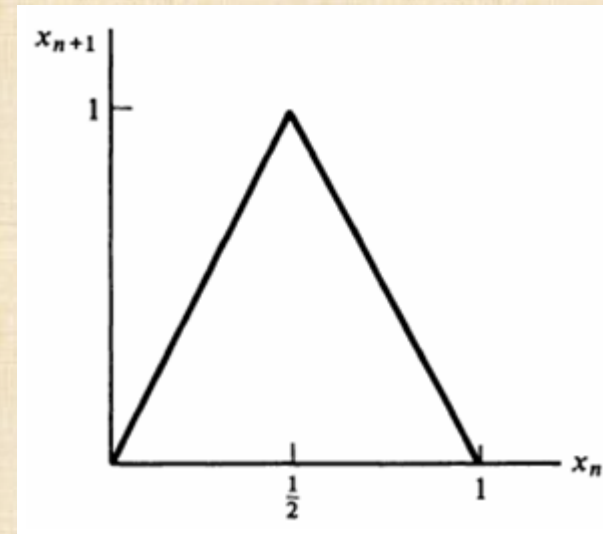
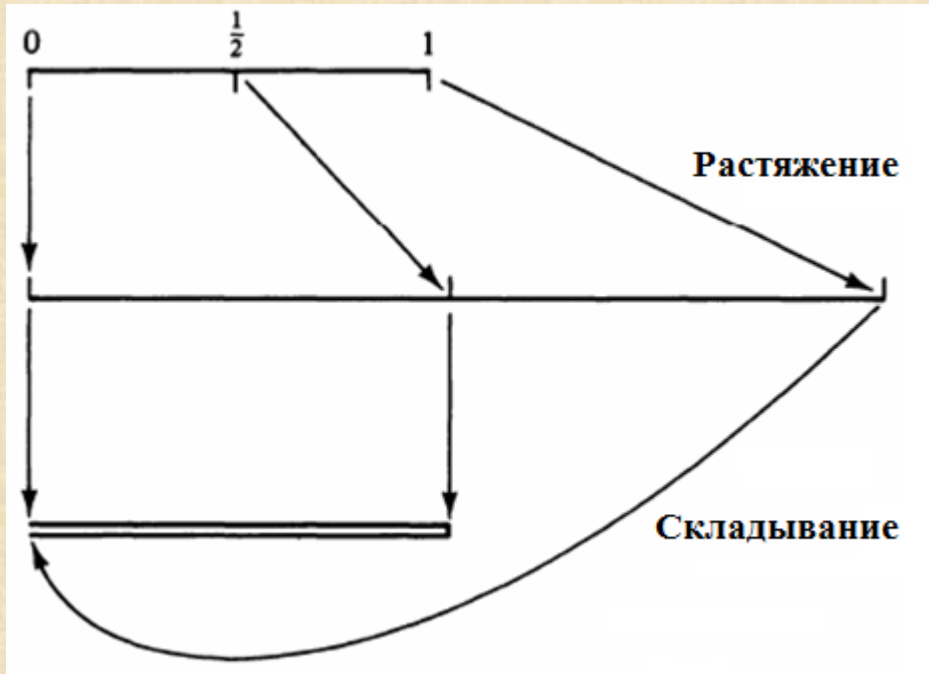


С точки зрения исходного отображения обе родившиеся точки принадлежат одной и той же траектории – циклу периода 2, т.е. отвечают условию $X_{n+2} = X_n$.

Таким образом, потеря устойчивости точкой x_1^* при $\mu = 0$ приводит к рождению устойчивого цикла удвоенного периода. По этому признаку данный случай получил название «**бифуркация удвоения**».

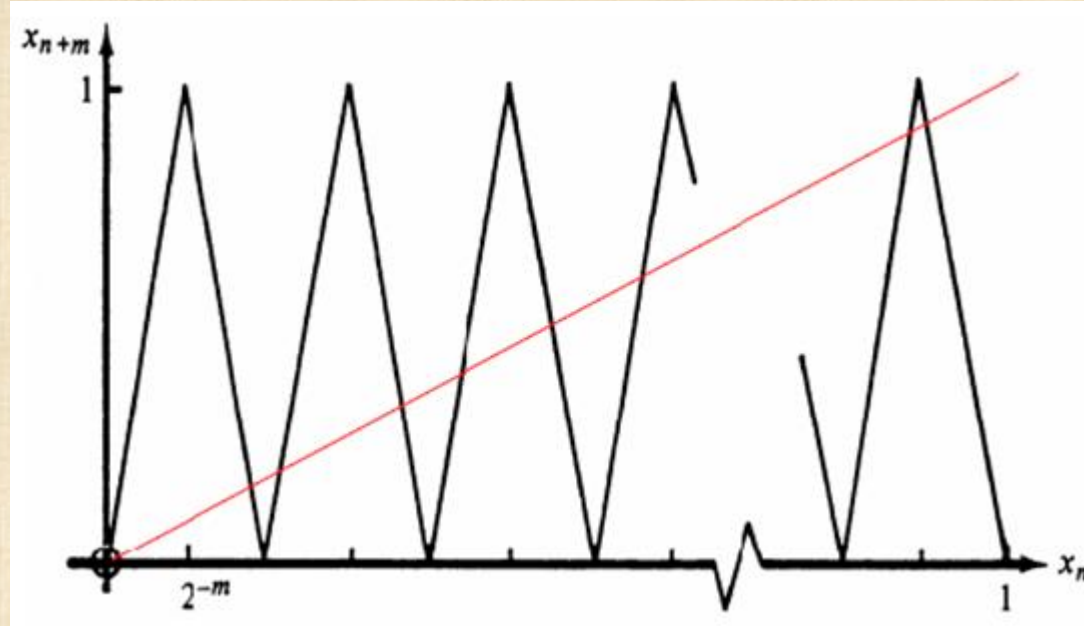
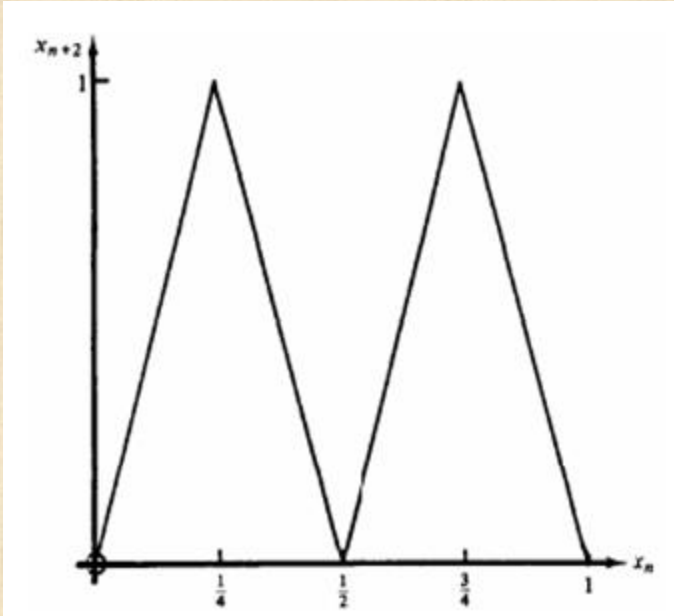
Примеры одномерных отображений

Треугольное отображение (tent map): $x_{n+1} = 1 - 2 \left| x_n - \frac{1}{2} \right|$



Растяжение приводит к экспоненциальному разбеганию близких траекторий. Складывание возвращает образ в интервал $(0, 1)$ и вызывает необратимость отображения (образ имеет два прообраза).

$$x_{n+m} = M^m(x_n)$$



Точки пересечения графика с прямой $x_{n+m} = x_n$ задают 2^m неподвижных точек отображения M^m . Из них две – неподвижные точки отображения M . Остальным соответствуют периодические орбиты M .

Если начальная точка известна с точностью $\pm 2^{-m}$, то положение её образа после t и более итераций предсказать нельзя.

Треугольное отображение – хаотическая система.

Разбегание траекторий характеризуется показателем Ляпунова. Для отображения $x_{n+1} = f(x_n)$

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right|$$

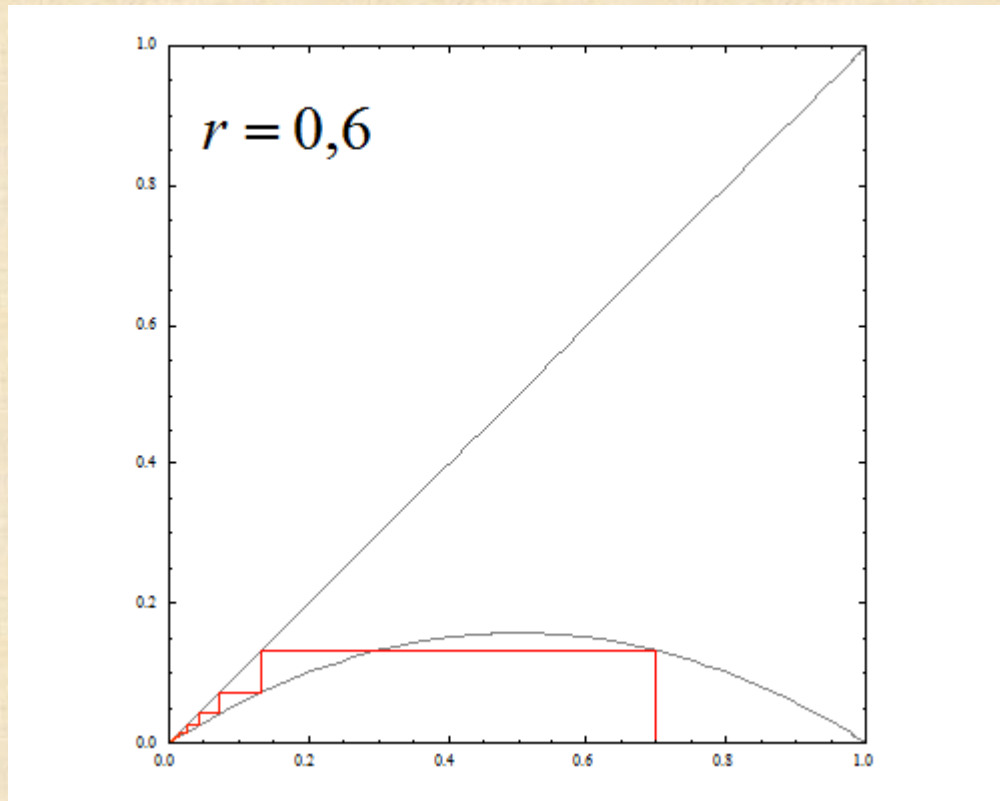
$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \right\}$$

Показатель Ляпунова для треугольного отображения вдоль типичной траектории равен $\lambda = \ln 2 > 0$

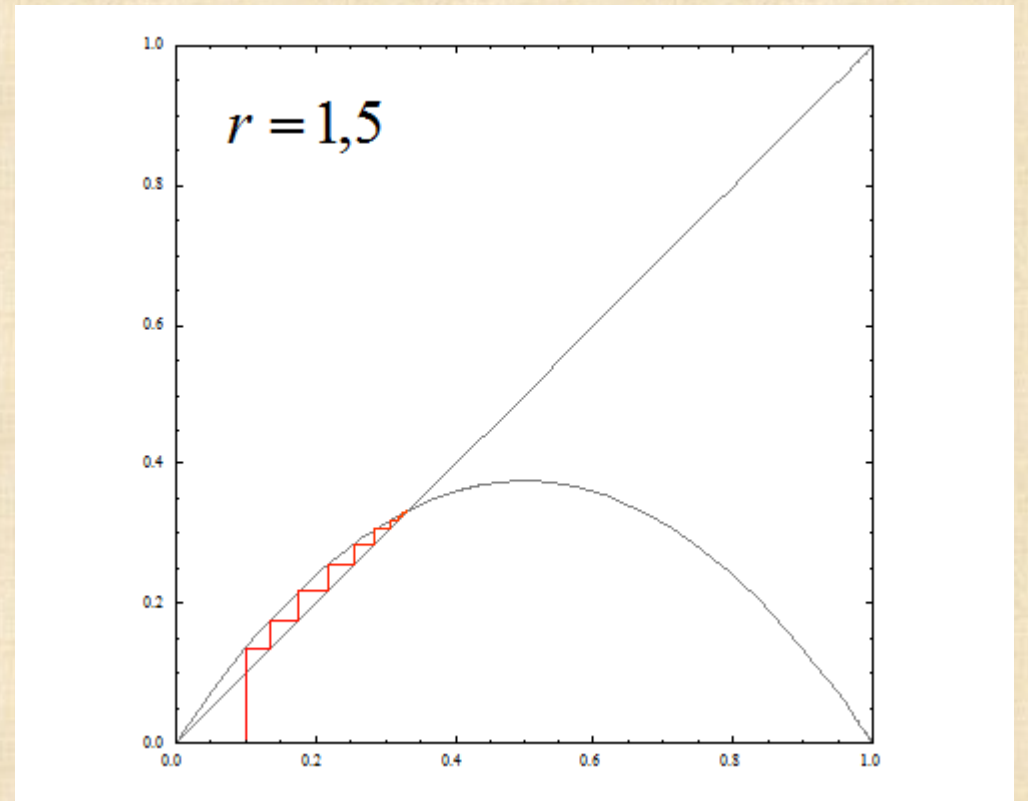
Типичная траектория треугольного отображения равномерно покрывает интервал $(0, 1)$.

Логистическое отображение

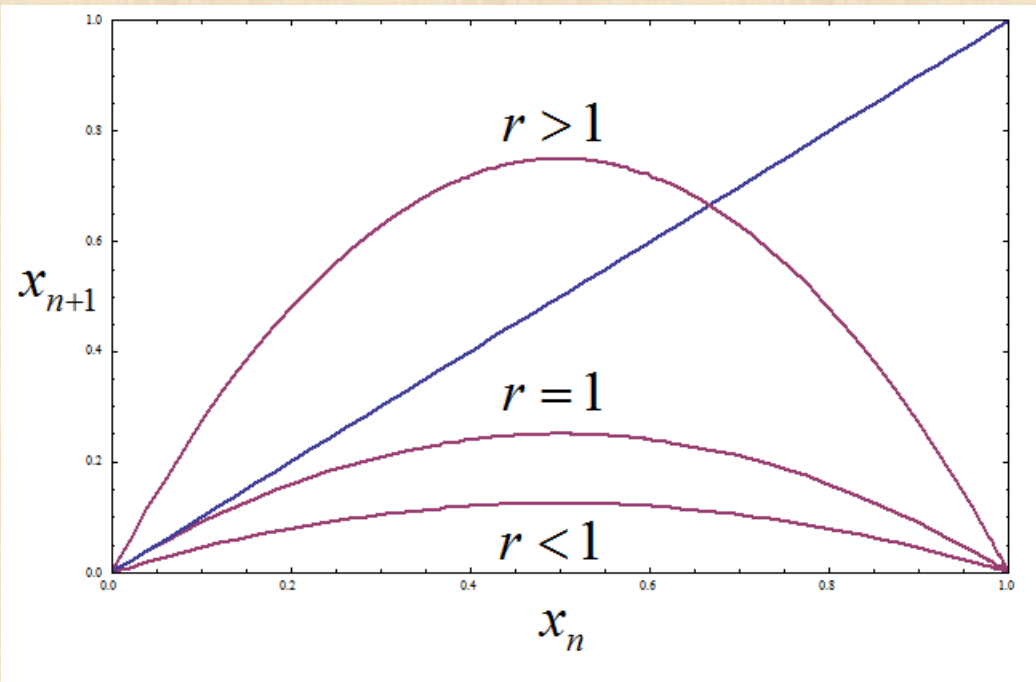
$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq r \leq 4$$



Притягивающая неподвижная
точка $x^* = 0$

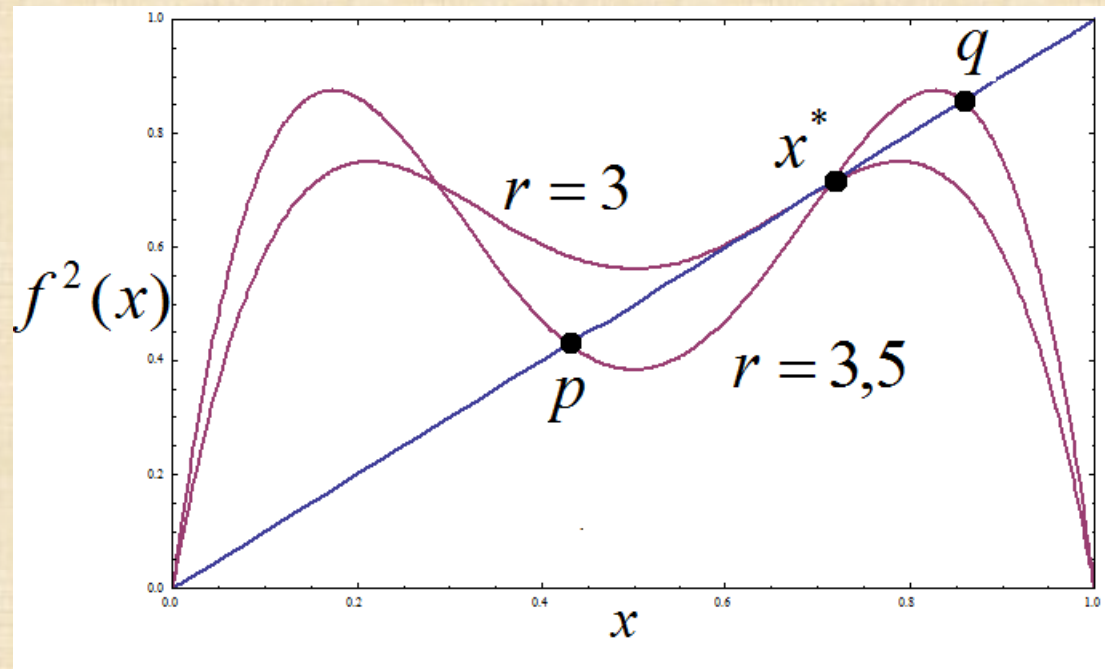


Притягивающая неподвижная
точка $x^* = 1 - 1/r$



При $r = 1$ происходит транскритическая бифуркация: точка $x = 0$ теряет устойчивость и рождается устойчивая неподвижная точка $x^* = 1 - 1/r$.

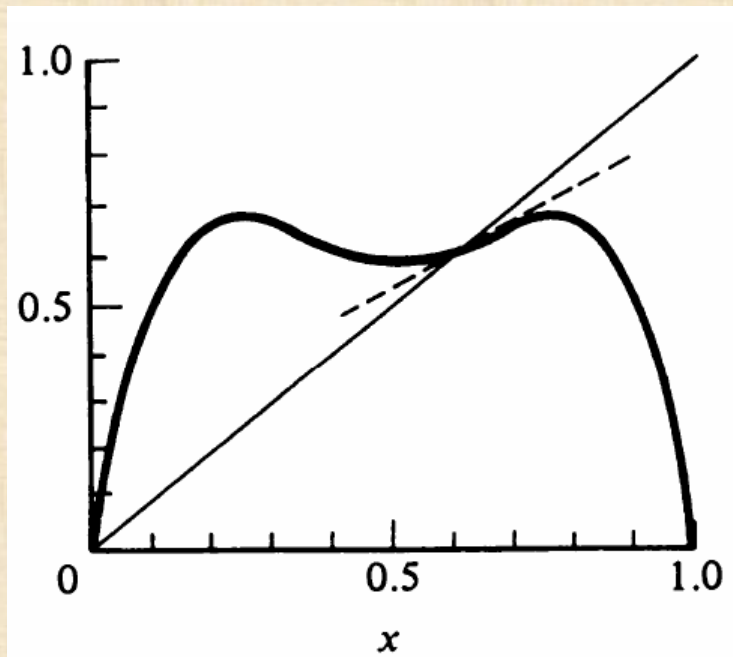
При дальнейшем росте r растёт наклон графика в точке x^* . При $r = 3$ имеем, $f'(x^*) = -1$ и происходит следующая бифуркация: рождение цикла периода 2.



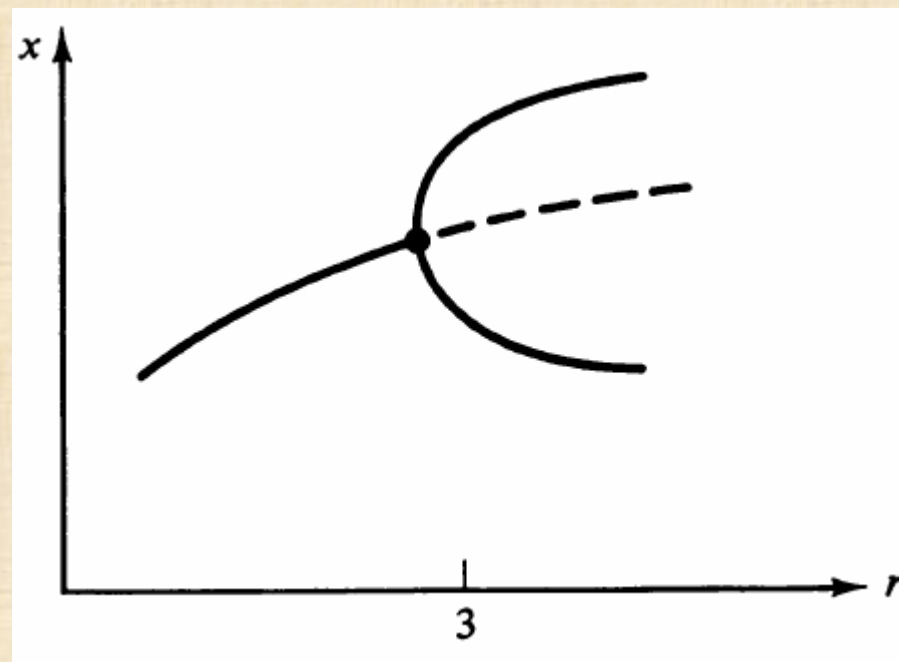
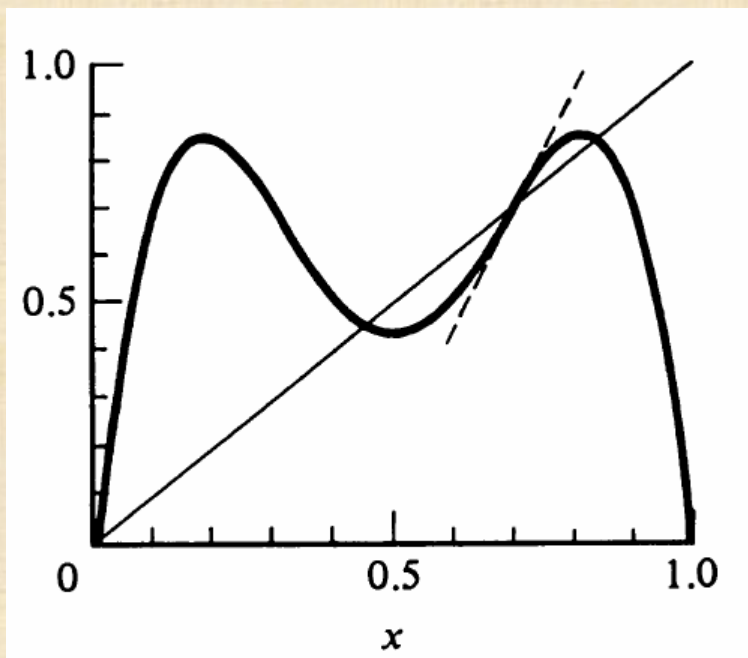
$$f(p) = q, \quad f(q) = p,$$

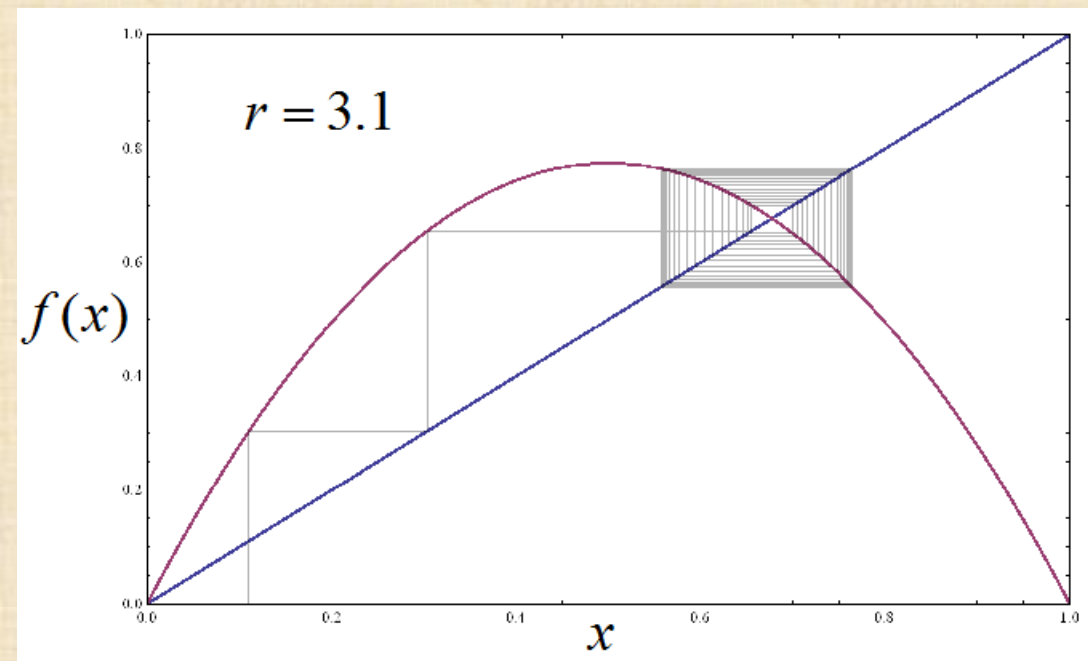
$$p, q = \frac{r+1 \pm \sqrt{(r-3)(r+3)}}{2r}.$$

Этот цикл существует при всех $r > 3$.



Бифуркация рождения цикла периода 2



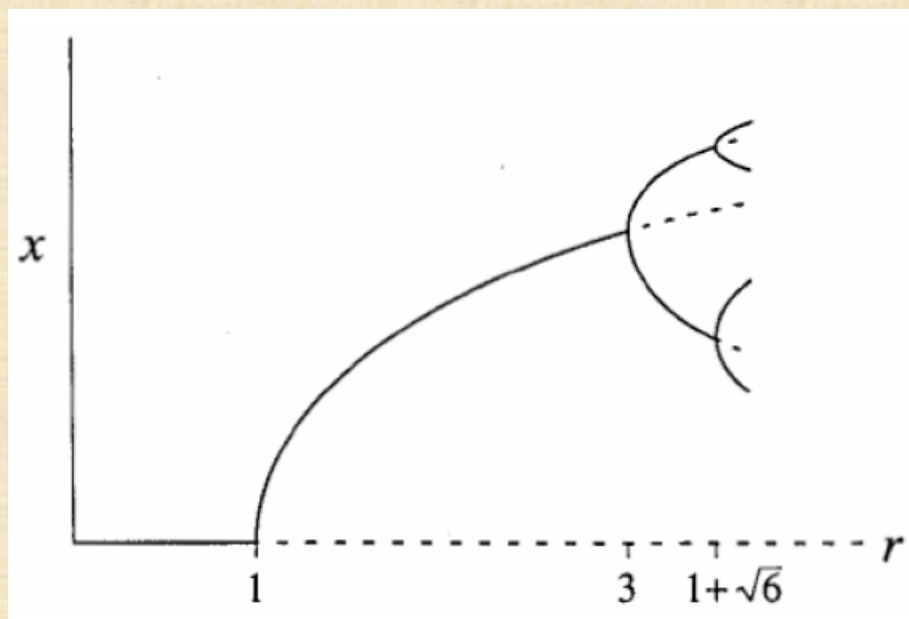


Вопрос об устойчивости этого цикла сводится к вопросу об устойчивости неподвижной точки $f^2(x) = x$.

$$\rho = \frac{d}{dx}(f(f(x)))_{x=p} = f'(f(p))f'(p) = f'(q)f'(p).$$

Вычисляя, получим: $\rho = 4 + 2r - r^2$.

Цикл устойчив при $3 < r < 1 + \sqrt{6}$.

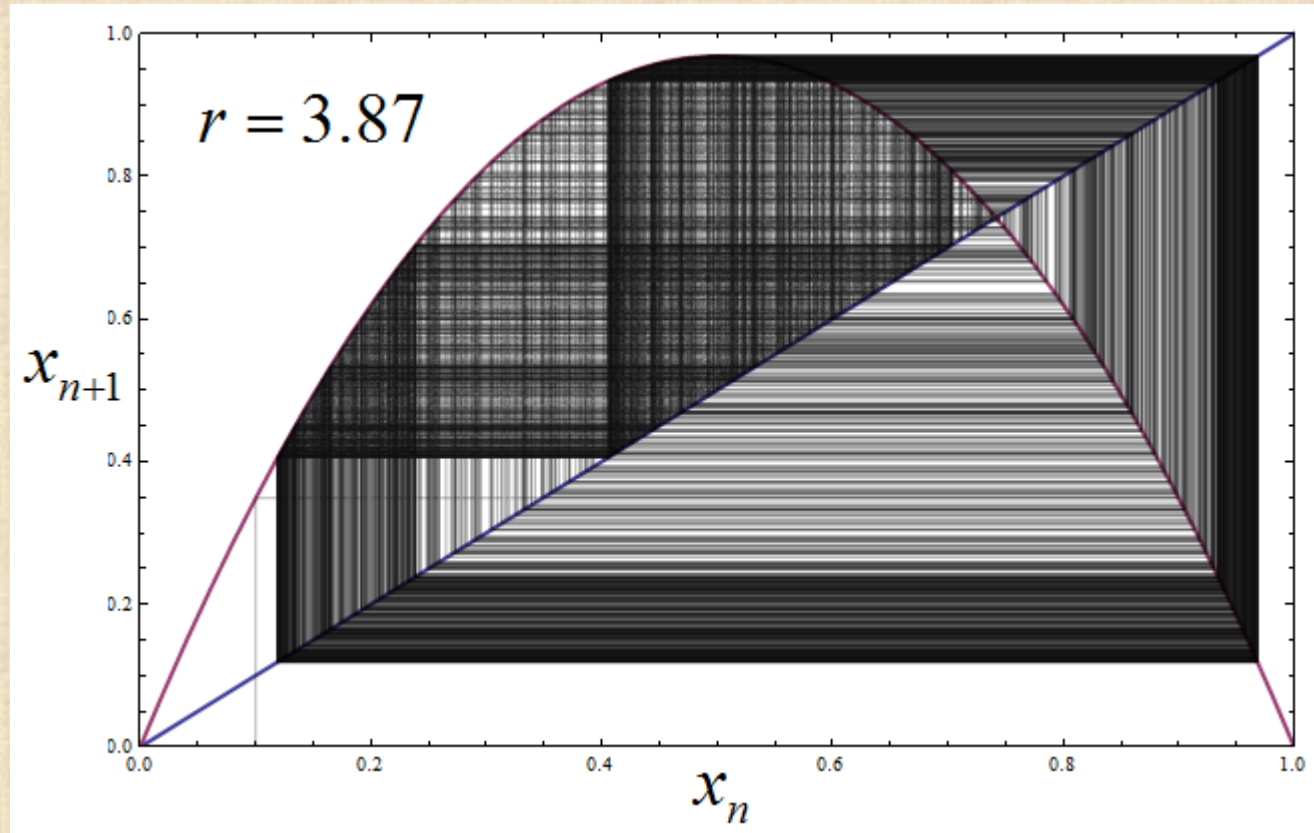


Бифуркационная диаграмма

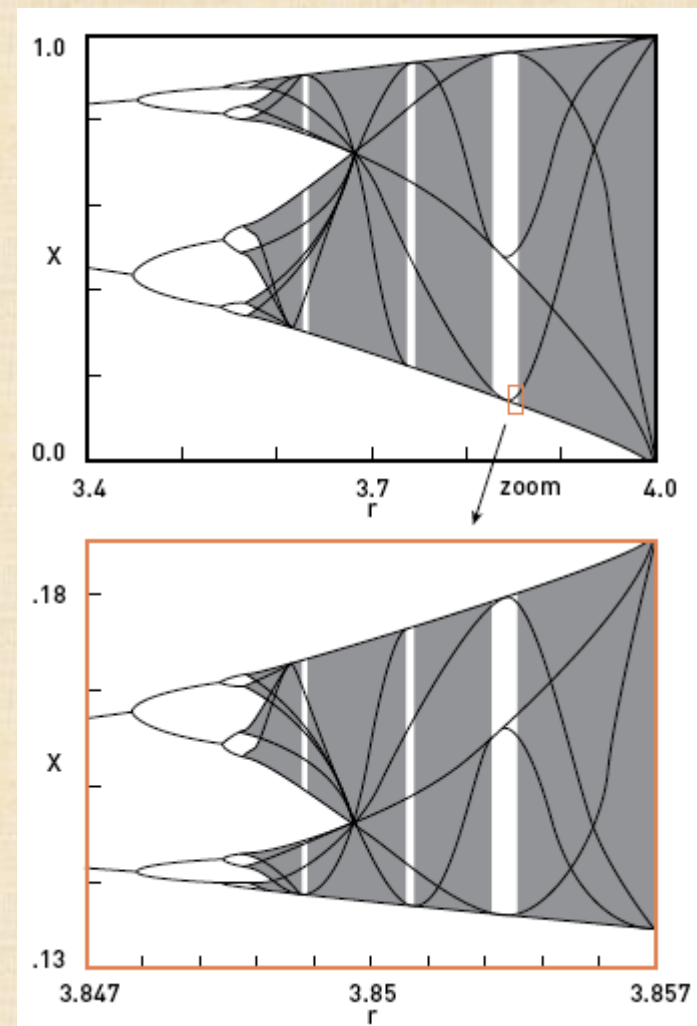
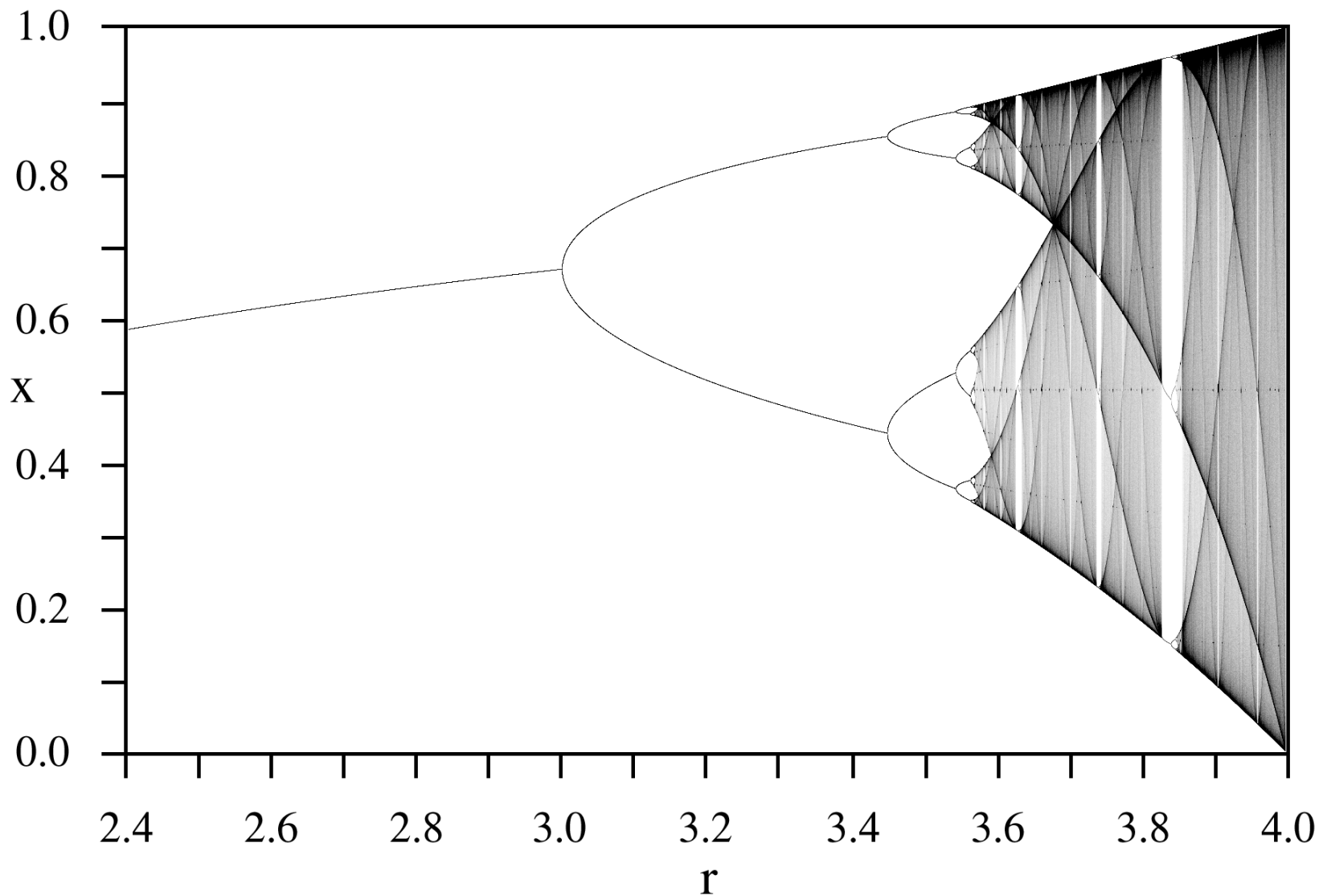
Каскад бифуркаций удвоения периода предельных циклов

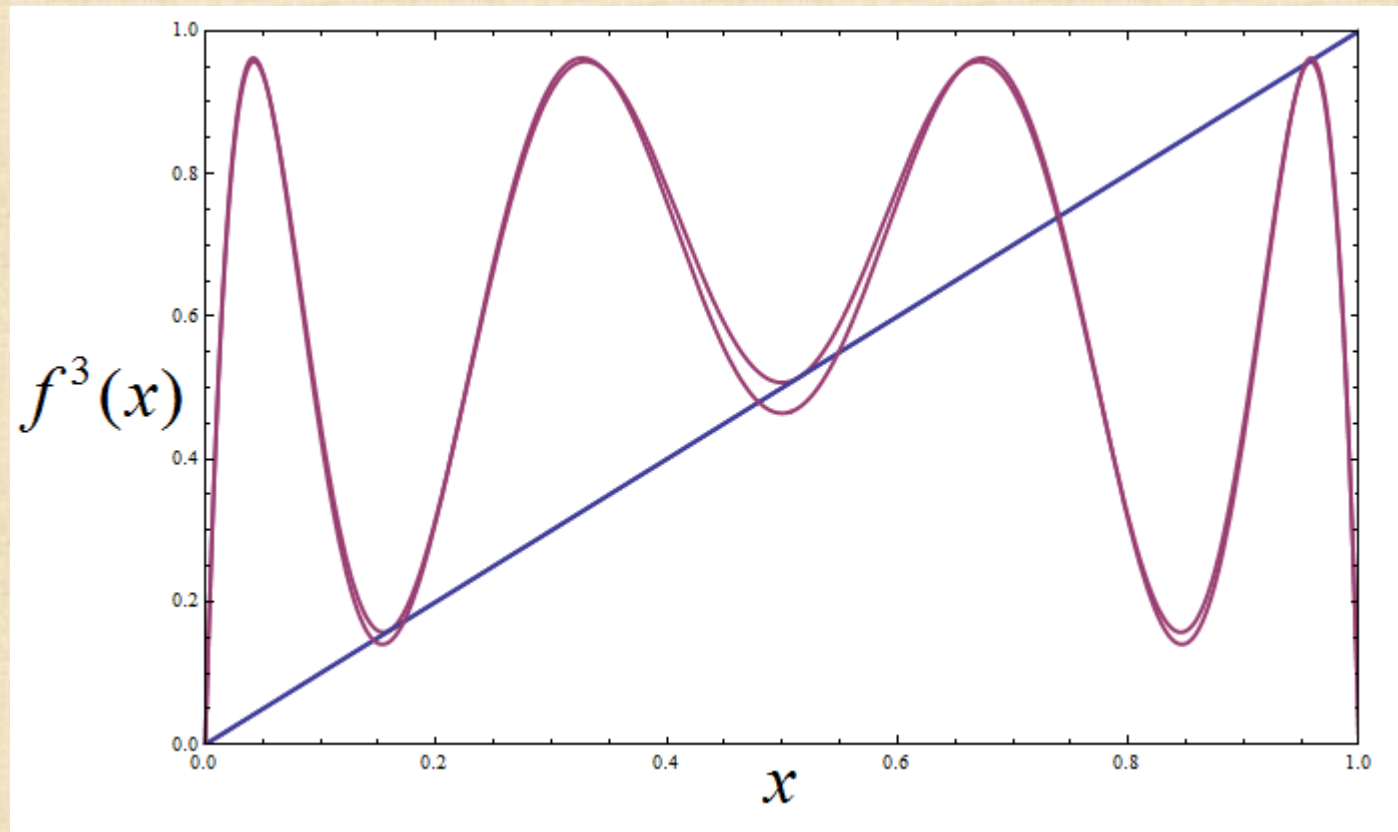
$r_1 = 3$	период 2
$r_2 = 3,449\dots$	4
$r_3 = 3,54409\dots$	8
$r_4 = 3,5644\dots$	16
$r_5 = 3,568759\dots$	32
\vdots	\vdots
$r_\infty = 3,569946\dots$	∞

Что происходит при $r > r_\infty$?

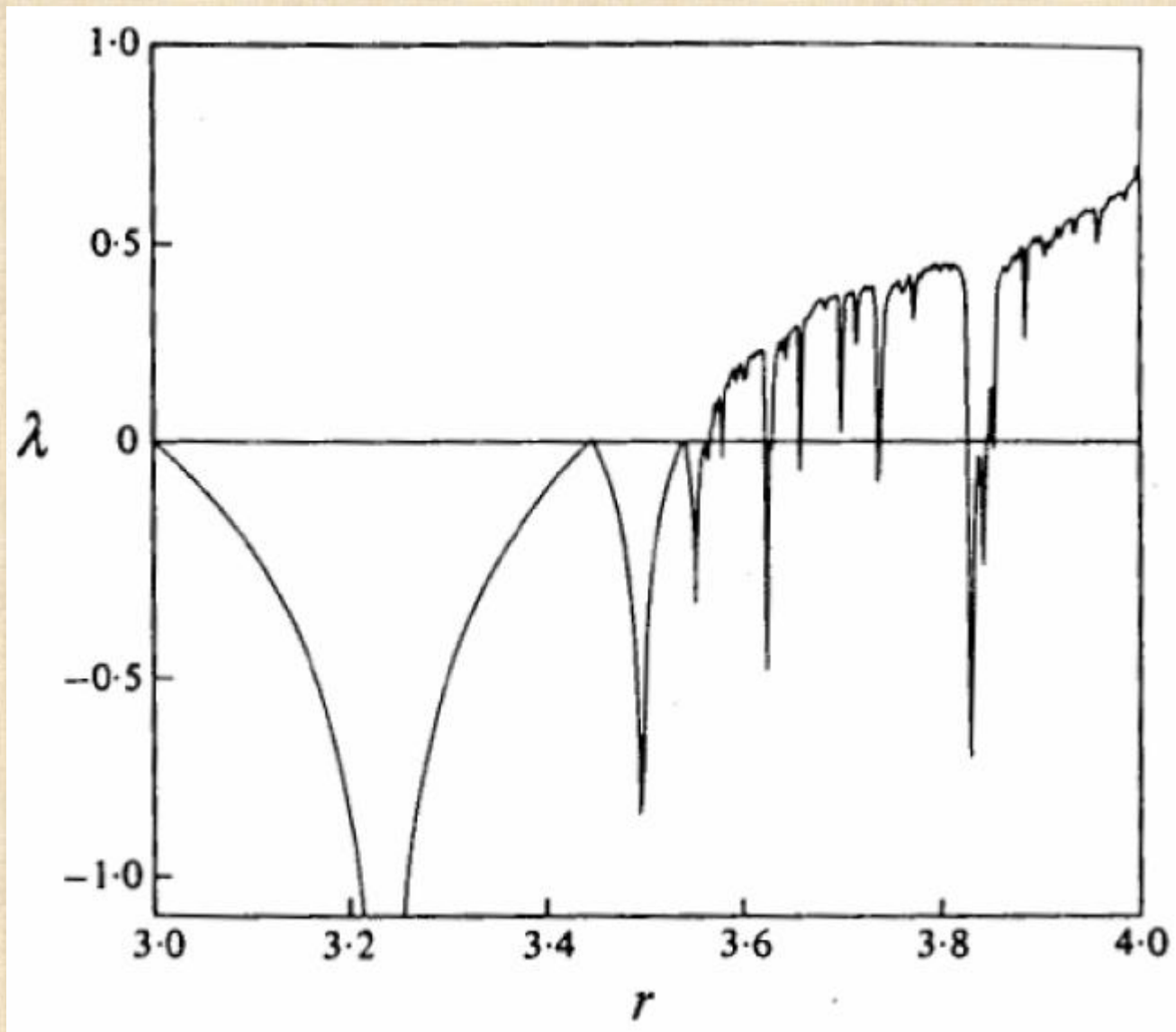


Структура притягивающих множеств логистического отображения в зависимости от r .





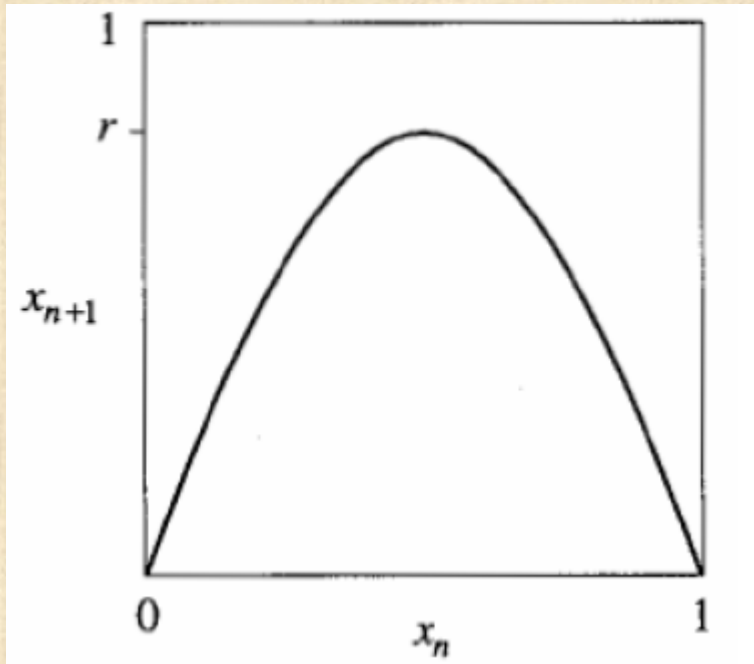
При $r = r^* = 1 + \sqrt{8} = 3.8284\dots$ происходит касательная бифуркация. При этом рождаются устойчивые неподвижные точки отображения f^3 , соответствующие циклу периода 3.



Зависимость показателя Ляпунова от r для логистического отображения.

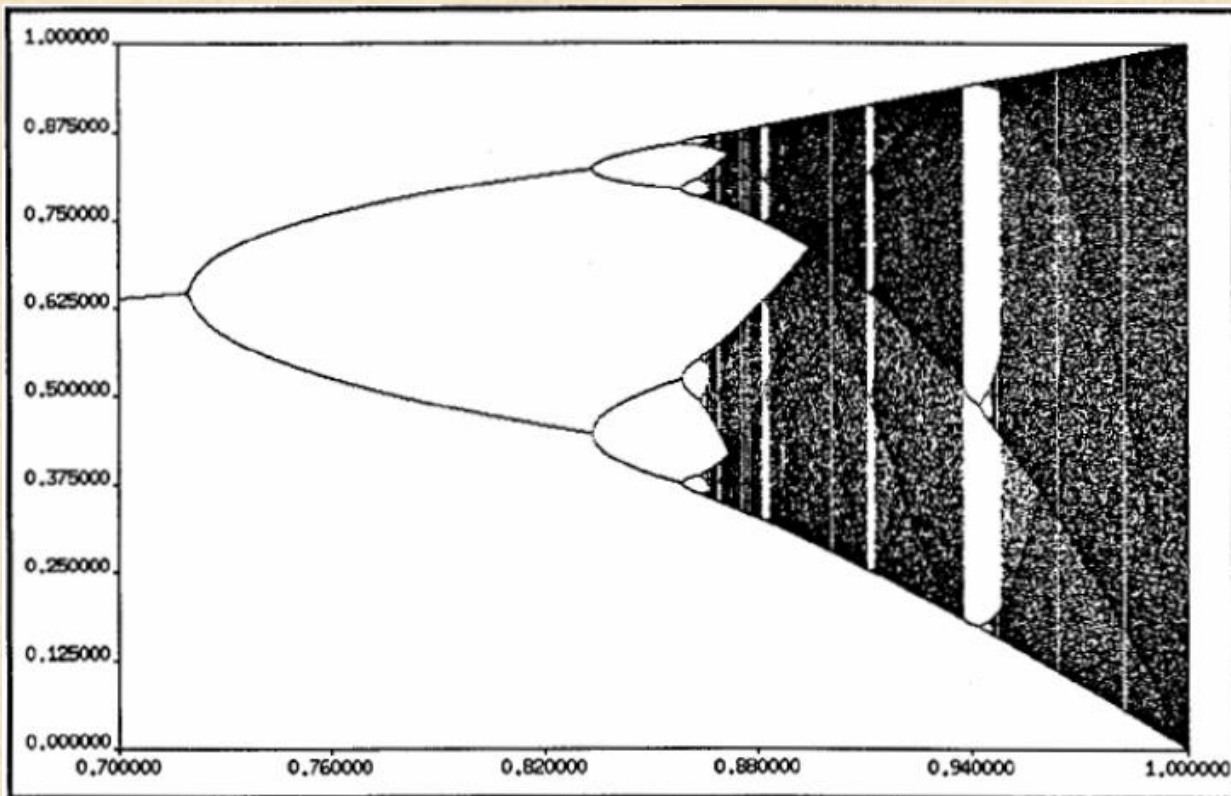
Универсальность Фейгенбаума

Рассмотрим отображение: $x_{n+1} = r \sin \pi x_n$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq r \leq 4$

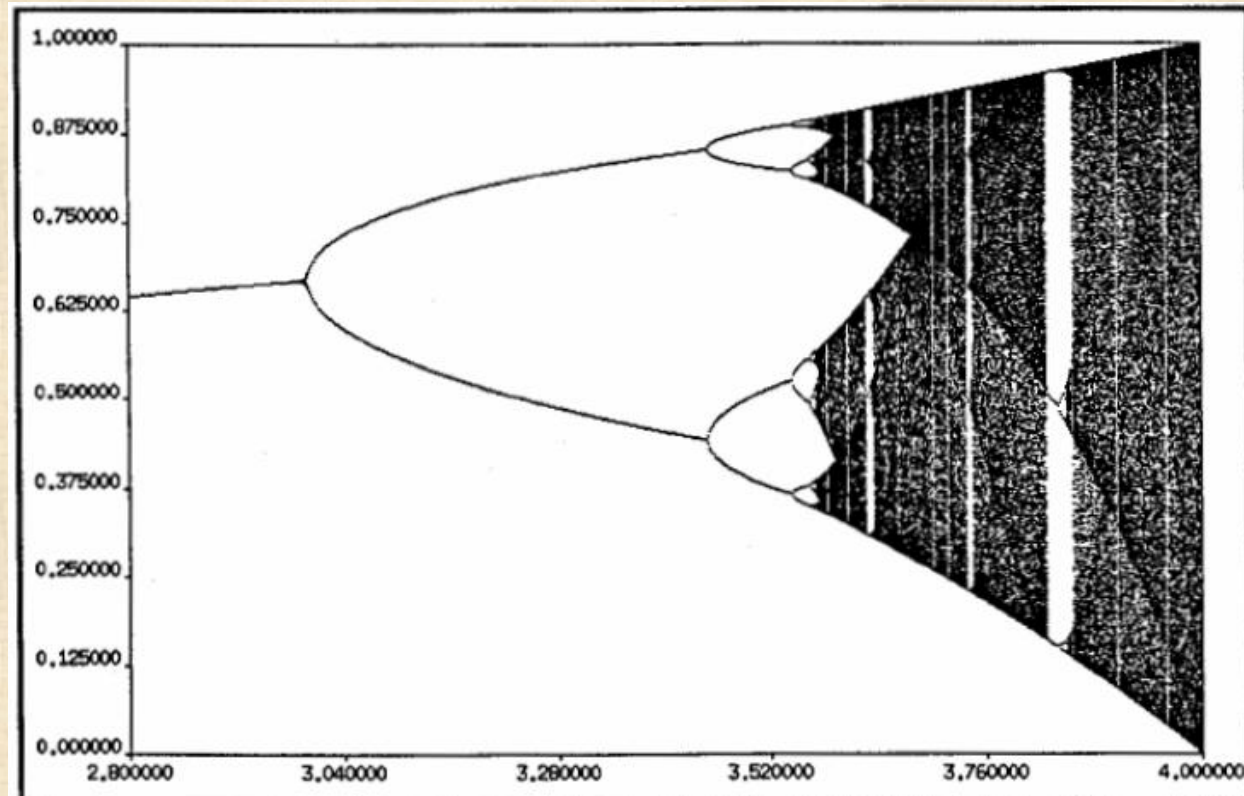


Сравним структуру притягивающих множеств в зависимости от r для этого отображения и для логистического.

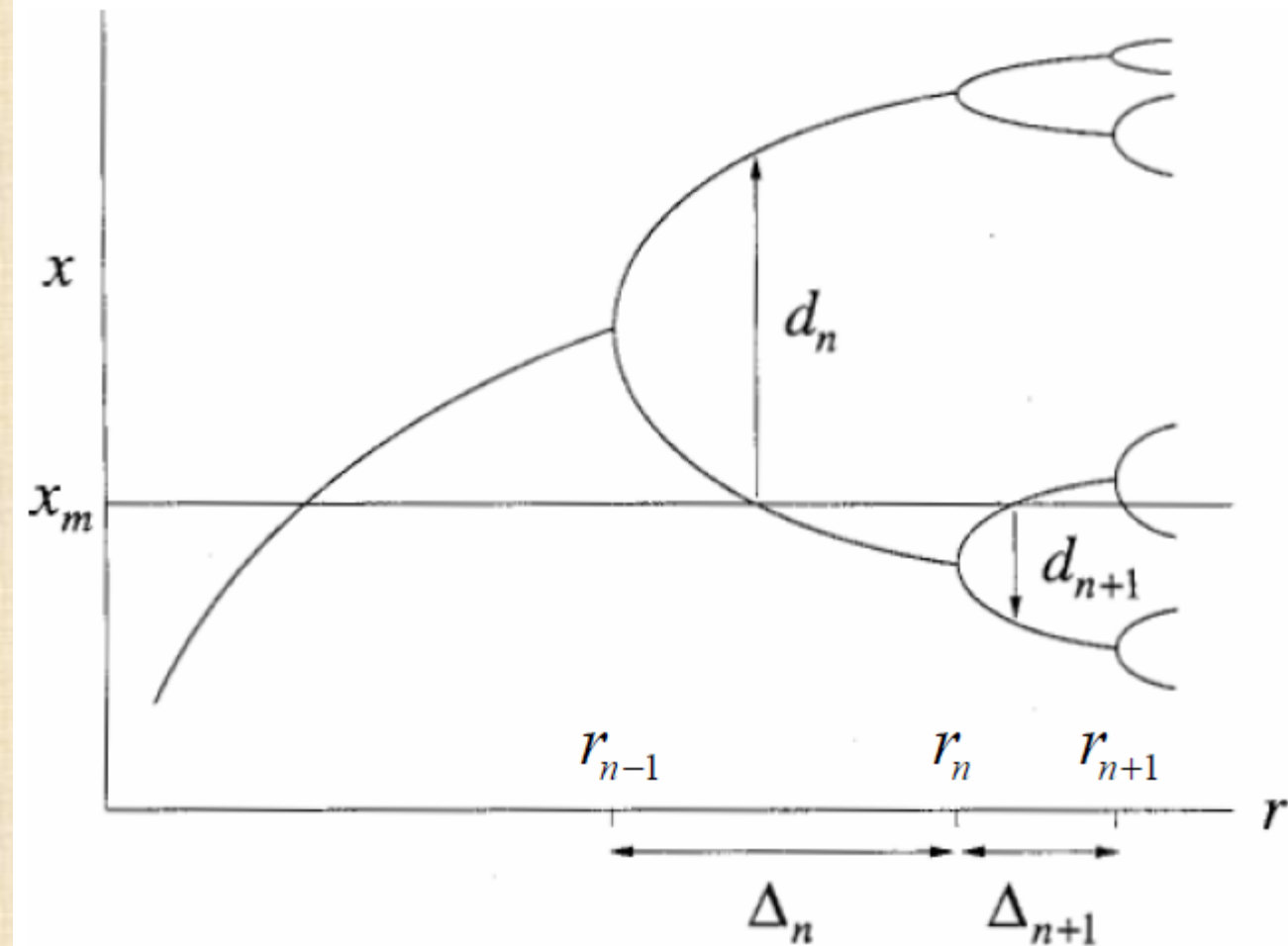
Универсальность Фейгенбаума



$$x_{n+1} = r \sin \pi x_n$$



$$x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$$



Пусть функция $f(x)$, задающая отображение, имеет единственный максимум при $x = x_m$ (такие отображения называют унимодальными).

М. Фейгенбаум (1978, 1979) заметил и доказал, что для унимодальных отображений с квадратичным максимумом последовательность бифуркаций удвоения обладает универсальными свойствами

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4,669\dots, \text{ т.е. } \Delta_n / \Delta_{n+1} \rightarrow \delta \text{ при } n \rightarrow \infty$$

$$\frac{d_n}{d_{n+1}} \rightarrow \alpha = -2,5029\dots, \text{ при } n \rightarrow \infty$$